Évaluation

Produit scalaire - Dérivation

Sujet B 11/02/2022

Note et remarques : /15

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans la l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/3)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$. Déterminer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

On va utiliser la formule

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Cependant, pour cela, on a besoin de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ que l'on calcule comme suit

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v})) = 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -5\sqrt{2}.$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\\ &= 2^2 + 2\times(-5\sqrt{2}) + 5^2\\ &= 29 - 10\sqrt{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{29-10\sqrt{2}}$.

Exercice 2. (/2)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-3$, $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$, $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\|\vec{w}\|=3$. Calculer $\left(\frac{1}{3}\vec{u}+5\vec{v}\right)\cdot(\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{w})$.

On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\vec{u}+5\vec{v}\right)\cdot(\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{w}) &= \frac{1}{3}\vec{u}\cdot\vec{u}-\frac{1}{6}\vec{u}\cdot\vec{w}+5\vec{v}\cdot\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}\cdot\vec{w}\\ &= \frac{1}{3}\|\vec{u}\|^2-\frac{1}{6}\times(-3)+5\times 2-\frac{5}{2}\times 0\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+10\\ &= \frac{65}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 3. (/2)

Existe-t-il m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2m+1 \\ m+2\end{pmatrix}$ soient orthogonaux ? Si oui, déterminer la ou les valeurs possibles de m.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, i.e. si et seulement si

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=m(-2m+1)+(m-2)(m+2)=-2m^2+m+m^2-4=-m^2+m-4=0.$$

Il faut chercher les éventuelles racines du polynôme $-m^2+m-4$. On calcule son discriminant

$$\Delta=1^2-4\times(-1)\times(-4)=-15.$$

Le discriminant est négatif, $-m^2+m-4$ n'a donc pas de racines.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc jamais orthogonaux.

Exercice 4. (/4)

Soient $A\,(1\,;1)$, $B\,(-1\,;1)$ et $C\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ trois points du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

On va utiliser la formule

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right).$$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

On trouve alors $AB=2$ et de la même façon

$$AC=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1.$$

Par ailleurs, en utilisant la formule du produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}.$$

On a donc

$$-\sqrt{3}=2\times1\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right).$$

On en déduit que

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a alors

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\pm\frac{5\pi}{6}[2\pi].$$

Exercice 5. (/4)

Le professeur Rogue souhaite préparer un philtre de vérité afin de faire avouer aux jumeaux Weasley qu'ils l'avaient délibérément visé avec leurs feux d'artifices lors d'un exercice du chapitre sur les polynômes du second degré. Lors de la préparation du philtre, il doit ajouter deux ingrédients cruciaux : une écaille de dragon lorsque la température de la potion est à son maximum et de la mandragore lorsque la température de la potion est à son minimum. La température du philtre pendant sa préparation est donnée par la fonction

$$f(t) = \frac{1}{18}(t^3 - 13t^2 + 30t + 1440),$$

où $t \in [0\,;15]$ est le temps en heure écoulé depuis le début de la préparation.

Déterminer à quels moments Rogue doit ajouter les deux ingrédients.

Pour trouver les extremums de f, déterminons ces variations et pour cela sa dérivée. f étant un polynôme de degré 3, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\,;15]$. On a pour tout $t \in [0\,;15]$,

$$f'(t) = \frac{1}{18}(3t^2 - 26t + 30).$$

Il faut maintenant étudier le signe du polynôme $3t^2 - 26t + 30$ en cherchant ses éventuelles racines. On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-26)^2 - 4 \times 3 \times 30 = 316$. Le discriminant étant positif, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{26 - \sqrt{316}}{6} = \frac{13 - \sqrt{79}}{3} \simeq 1,37,$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{26 + \sqrt{316}}{6} = \frac{13 + \sqrt{79}}{3} \simeq 7,3.$$

Comme le coefficient dominant du polynôme est positif, on a :

t	0		1.37		7.3		15
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	80	↗	81.07	↘	75.29	↗	130

Le maximum de f est 130 atteint en 15 et le minimum de f est 75,29 atteint en 7,3.

Il faut donc ajouter la mandragore au bout de 7,3h et l'écaille de dragon au bout de 15h.