Chapitre 4

Algèbre de Boole

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, un mathématicien et logicien anglais, George Boole, a développé une structure algébrique permettant de manipuler les propositions logiques au moyen d'équations mathématiques où les énoncés VRAI et FAUX sont représentés par les valeurs 1 et 0.

L'algèbre de Boole est constituée de :

— deux éléments : 0 et 1, respectivement Faux et Vrai ;

— deux opérations binaires : ET et OU, notées respectivement $\wedge$ et $\vee$.

— une opération unaire : NON notée $\neg$.

4.1 Les opérations booléennes

Une opération booléenne est entièrement définie par sa table de vérité, table dont chaque ligne affiche une combinaison des variables d'entrée et fournit en regard le résultat correspondant.

NON	
X	$\neg X$
0	1
1	0

OU		
X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ET		
X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarque : on peut observer des similitudes entre OU et l'addition et ET et la multiplication. En effet, dans le cas de ET, on obtient le même résultat que pour la multiplication ; il en va de même pour OU à l'exception de 1 OU 1 qui renvoie 1 et non 2.

Les similitudes vont même plus loin puisque on retrouve la priorité du ET sur le OU, la distributivité du ET sur le OU et donc la possibilité de factoriser (à l'instar de $\times$ et $+$). Enfin, 1 est un élément neutre pour ET (comme pour la multiplication) et 0 pour OU (comme pour l'addition). On obtient le comparatif dans la propriété suivante.

Propriété 4.1. ***[Propriétés de OU et ET ; comparaison avec + et ×]***

Booléens $(\{0\,;1\}\,;\vee\,;\wedge)$	***Réels*** $(\mathbb{R}\,;+\,;\times)$
$A \vee B = B \vee A$	$a + b = b + a$
$A \wedge B = B \wedge A$	$a \times b = b \times a$
$\wedge$ *est prioritaire sur* $\vee$	$\times$ *est prioritaire sur* $+$
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
$1 \wedge A = A$ *(1 élément neutre pour ET)*	$1 \times a = a$ *(1 élément neutre pour* $\times$*)*
$0 \wedge A = 0$	$0 \times a = 0$
$0 \vee A = A$ *(0 élément neutre pour OU)*	$0 + A = A$ *(0 élément neutre pour +)*
$1 \vee A = 1$	

Propriété 4.2. ***[Propriétés de NON]*** *Soient* A *et* B *deux booléens.*

1. $\neg(\neg A) = A$ *: NON(NON(A))=A.*
2. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ *: NON(A ET B)=NON(A) OU NON(B).*
3. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ *: NON(A OU B)=NON(A) ET NON(B).*

Remarque : là encore, $\neg(\neg A) = A$ doit nous faire faire le parallèle avec les réels : $-(-x) = x$.

4.2 Les fonctions booléennes

Une fonction booléenne est une application qui, à l'aide des opérations élémentaires (ET, OU et NON) de l'algèbre de Boole, à tout n-uplet de variables booléennes fait correspondre une variable booléenne. Réciproquement, toutes les fonctions booléennes peuvent être obtenues par combinaison des opérateurs NON, OU et ET.

Exemple : considérons la fonction booléenne : $f\,(A\,;B) = (A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$. On obtient sa table de vérité en trouvant chacune des tables intermédiaires des fonctions qui compose f puis en appliquant les règles des ET, OU et NON ci-dessus.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$f\,(A\,;B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Réciproquement, il est possible de déterminer l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité. Pour cela, il faut faire la « somme (ou) » de tous les « produits (et) » ayant pour valeur 1. En effet, une fonction étant uniquement déterminée par l'ensemble de ses images, les « produits » ne valant que 0 ou 1 et leur « somme » valant 1 dès l'un le vaut, on obtient ainsi les mêmes images que dans table de vérité. Toutefois, l'expression obtenue est rarement sous forme réduite et nécessite de l'être pour une utilisation optimale.

Exemple : considérons la table de vérité suivante :

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Regardons comment obtenir pour image 1. Le premier est obtenu en faisant $(\neg A) \wedge (\neg B)$, en effet, lorsque $A = B = 0$, on a alors $f(A;B) = 1 = (\neg 0) \wedge (\neg 0)$. Le second est obtenu en faisant $A \wedge (\neg B)$, en effet, lorsque $A = 1$ et $B = 0$, on a alors $f(A;B) = 1 = 1 \wedge (\neg 0)$. On en déduit que

$$f(A;B) = [(\neg A) \wedge (\neg B)] \vee [A \wedge (\neg B)].$$

On remarque que cette expression peut être améliorée en factorisant par $\neg B$, ce qui donne

$$f(A;B) = [(\neg A) \vee A] \wedge (\neg B) = 1 \wedge (\neg B) = \neg B,$$

ce dont on pourra facilement se convaincre en regardant la table de vérité.

4.3 Attendus et savoir-faire

- Connaître les symboles et les tables de vérité des trois opérations booléennes élémentaires.
- Être capable de dresser la table de vérité d'une fonction booléenne.
- Être capable de déterminer l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité.
- Traduire une situation concrète à l'aide de la logique booléenne et l'analyser.

4.4 Exercices

4.4.1 Démarrage

Exercice 4.1. Dresser la table de vérité de f et g définies par :

1. $f(A;B) = (A \vee B) \wedge (A \wedge B)$;
2. $g(A;B) = (A \vee B) \vee (A \wedge B)$.

A	B			$f(A;B)$

A	B			$g(A;B)$

Exercice 4.2. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

4.4.2 Approfondissement

Exercice 4.3. L'opérateur XOR (e**x**lusive **or**), noté $\oplus$, est très utilisé en électronique, en informatique et en cryptographie. Voici une fonction booléenne équivalente :

$$A \oplus B = ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)).$$

Dresser sa table de vérité.

XOR						
A	B	$\neg A$	$\neg B$			$A \oplus B$

Exercice 4.4. Construire la table de vérité de la fonction suivante :

$$f(A\,;B\,;C) = (A \wedge B) \vee ((\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge (\neg C)).$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge B$	$(\neg B) \wedge C$	$A \wedge (\neg C)$	$f(A\,;B\,;C)$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Exercice 4.5. [Démonstrations] Démontrer chacune des égalités suivantes en dressant la table de vérité des deux membres puis en vérifiant l'égalité de celles-ci. Soient A, B, C trois booléens.

1. $1 \vee A = 1$.
2. $0 \vee A = A$.
3. $1 \wedge A = A$.
4. $0 \wedge A = 0$.
5. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
7. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Exercice 4.6. [Implication] L'implication est symbolisée par $\implies$ et se définit comme suit : $A \implies B = (\neg A) \vee B$.

1. Dresser la table de vérité de l'implication.
2. Montrer que $A \implies B = (\neg B) \implies (\neg A)$.
3. Quel est le contraire d'une implication : $\neg(A \implies B)$? Autrement dit, quand est-ce qu'une implication est fausse ?

Exercice 4.7. [Équivalence] L'équivalence est symbolisée par $\iff$ et se définit comme suit : $A \iff B = (A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

1. Dresser la table de vérité de l'équivalence.
2. Montrer que $A \iff B = (\neg A) \iff (\neg B)$.

Exercice 4.8. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 4.9. [Interrupteurs]

1. Quand deux interrupteurs sont en parallèle, la lumière s'allume quand l'un d'eux est fermé.
2. Quand ils sont en série, la lumière s'allume quand les deux sont fermés.
3. Quand ils sont en va-et-vient, la lumière s'allume quand les deux sont fermés ou les deux sont ouverts.

On pose :

- I_n est à 0 quand l'interrupteur n est ouvert.
- I_n est à 1 quand l'interrupteur n est fermé.

Dresser la table de vérité de la fonction booléenne de chacun des trois cas ci-dessus puis exprimer ces fonctions à l'aide d'opérateurs booléens.

I_1	I_2	Parallèle

I_1	I_2	Série

I_1	I_2	Va-et-vient

Exercice 4.10. [Je mens] Sur une planète vivent les Purs (qui disent toujours la vérité) et les Pires (qui mentent toujours). Vous croisez deux personnes A et B sur cette planète. A affirme : « Au moins l'un de nous deux est un Pire ». Notons :

a : « A est un Pur » ;

b : « B est un Pur ».

À l'aide d'une table de vérité, dire ce que sont A et B.

Exercice 4.11. [Logique pour la vie] Voici le marché qu'un roi cruel avait pour habitude de proposer à ses condamnés.

Tout prisonnier doit choisir entre 2 cellules. Chaque cellule peut contenir une corde ou une clef (un seul objet par cellule). Si le prisonnier choisit une cellule avec une corde, il sera pendu. S'il choisit une cellule avec une clef, il sera libéré. Pour rendre plus cruelle encore la situation, les deux cellules contiennent parfois toutes deux une corde, mais aussi parfois toutes deux une clef et parfois l'une contient une clef et l'autre une corde.

Le roi donne par ailleurs des indications. Voici les inscriptions notées sur les portes des cellules :

Cellule 1 (I1) : « Il y a une clef dans cette cellule et une corde dans l'autre cellule. »

Cellule 2 (I2) : « Il y a une clef dans l'une des cellules et une corde dans l'autre cellule. »

Le roi annonce par ailleurs au prisonnier qu'une seule des deux inscriptions est correcte. On note

C1 : « La cellule 1 contient une clef. »

C2 : « La cellule 2 contient une clef. »

1. Traduire les affirmations I1 et I2 inscrites sur les portes à l'aide des propositions C1 et C2 et des connecteurs logiques (et, ou , non).
2. Dresser la table de vérité des affirmations I1 et I2 à partir de C1 et C2.
3. Conclure sur le choix que doit faire le prisonnier.

Exercice 4.12. [Logique pour la vie, retour en enfer] Même questions que l'exercice précédent avec les indications suivantes données au condamné.

Cellule 1 (I1) : « Au moins l'une des deux cellules contient une clef. »

Cellule 2 (I2) : « L'autre cellule contient une corde. »

4.4.3 Entraînement

Exercice 4.13. Dresser la table de vérité de f et g définies par :

1. $f(A\,;B) = \neg(A \vee B)$;
2. $g(A\,;B) = \neg(A \wedge B)$.

Exercice 4.14. Construire la table de vérité de la fonction suivante :

$$f(A\,;B\,;C) = \neg(A \wedge C) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C)).$$

Exercice 4.15. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	$f(A\,;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$f(A\,;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0