

# Évaluation

## Algèbre de Boole

16/02/2022

Note et remarques : /10

**Exercice 1.** ( /2) On rappelle que l'opérateur booléen XOR est défini par :

$$A \oplus B = ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)).$$

Dresser sa table de vérité.

XOR						
$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge B$	$A \wedge (\neg B)$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

**Exercice 2.** ( /3) Déterminer l'expression de la fonction booléenne  $f$  ayant la table de vérité ci-dessous. On réduira l'expression au maximum.

$A$	$B$	$C$	$f(A; B; C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

On additionne (OU) les produits (ET) dont le résultat est 1 :

$$(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C \quad \text{et} \quad A \wedge (\neg B) \wedge C.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 f(A; B) &= [(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C] \vee [A \wedge (\neg B) \wedge C] \\
 &= [\neg A \vee A] \wedge (\neg B) \wedge C \quad (\text{factorisation par } (\neg B) \wedge C) \\
 &= 1 \wedge (\neg B) \wedge C \quad (\text{car } \neg A \vee A = 1) \\
 &= (\neg B) \wedge C.
 \end{aligned}$$

**Exercice 3.** ( /5) Vous êtes en train de passer votre épreuve d'algèbre booléenne et votre machiavélique professeur vous place face à un dilemme : choisir entre la réponse A et la réponse D. Chaque réponse contient soit la réussite de l'épreuve, soit son échec. Afin de vous éprouver encore plus, les réponses peuvent parfois contenir toutes les deux l'échec ou la réussite de l'épreuve. Chaque réponse est accompagnée d'une indication :

— Pour la réponse A :  $I_1 =$ « Cette réponse contient l'échec et l'autre la réussite » ;

— Pour la réponse D :  $I_2 =$ « Soit cette réponse contient la réussite, soit c'est l'autre ».

Votre machiavélique professeur vous annonce qu'une seule des deux indications est vraie. On note

—  $A =$ « La réponse A contient la réussite de l'épreuve » ;

—  $D =$ « La réponse D contient la réussite de l'épreuve ».

1. Exprimer  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $A$  et  $D$ .

On a

$$I_1 = \neg A \wedge D \quad \text{et} \quad I_2 = A \oplus D = (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge (\neg D)).$$

2. Dresser les tables de vérité de  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $A$  et  $D$ .

$A$	$D$	$\neg A$	$I_1 = \neg A \wedge D$	$I_2 = A \oplus D$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0

3. En déduire quelle réponse choisir (ou ne pas choisir).

Comme une seule des deux indications est vraie (ce qui peut se traduire par  $I_1 \oplus I_2$ ), la possibilité d'après le tableau ci-dessus est lorsque  $I_1 = 0$  et  $I_2 = 1$ , donc lorsque  $A = 1$  et  $D = 0$ . Il faut donc choisir la réponse A.