Évaluation

Colinéarité - Fonctions affines

Sujet A 16/02/2022

Compétences : A : /4 ; C : /4 ; D : /4 ; E1 : /4 ; E2 : /2 ; Total : /18

Instructions générales :
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. Soient $C(-7\,;3)$, $D(1\,;1)$ et $E(5\,;0)$ trois points du plan. Le point C appartient-il à la droite (DE) ?

C appartient à la droite (DE),
si et seulement si C, D et E sont alignés,
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le déterminant

$$d = x_1y_2 - x_2y_1 = 4 \times (-2) - 8 \times (-1) = -8 + 8 = 0.$$

C appartient donc à (DE).

Exercice 2. Soient $A\,(-2\,;4)$, $B\,(3\,;0)$, $M\,(0\,;-3)$ et $N\,(x\,;-6)$. Déterminer la valeur de x telle que (AB) et (MN) soient parallèles.

(AB) et (MN) sont parallèles
si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$. Le déterminant est nul si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \\ 5\times(-3) - x\times(-4) &= 0 \\ -15 + 4x &= 0 \\ 4x &= 15 \\ x &= \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$ et $C\,(x_C\,;y_C)$ trois points du plan. Compléter l'algorithme suivant visant à déterminer si A, B et C sont alignés.

Algorithme 1 : Alignement

Données : x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C

```
Début
    x1 ← xB − xA
    y1 ← yB − yA
    x2 ← xC − xA
    y2 ← xC − xA
    d ← x1y2 − x2y1
    Si d = 0 Alors
        Sorties : A, B et C sont alignés
    Sinon Si d ≠ 0 Alors
        Sorties : A, B et C ne sont pas alignés
Fin
```

Exercice 4. Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = 5\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= 5\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}\right)\\ &= 5\overrightarrow{AB} - 10\overrightarrow{CB}\\ &= 5\overrightarrow{AB} - 10\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \quad \text{relation de Chasles}\\ &= 5\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{AC} - 10\overrightarrow{AB}\\ &= -5\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On en déduit que $-9\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{AB}$ i.e. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A, B et C alignés.

Exercice 5. Soit f une fonction affine telle que $f(-3) = -4$ et $f(0) = 1$.

1. Déterminer l'expression de f.

f est affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b à déterminer. On a

$$a = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{1 - (-4)}{3} = \frac{5}{3}.$$

Il faut maintenant déterminer b. On sait que $f(0) = 1$, donc

$$\frac{5}{3} \times 0 + b = 1 \iff b = 1.$$

Donc $f(x) = \dfrac{5}{3}x + 1$.

2. Déterminer les variations de f, justifier.

On a $a = \dfrac{5}{3} > 0$, donc f est croissante.

Exercice 6. Résoudre l'inéquation $(4x-1)(2x+3) \leq 0$.

On a $4x-1=0$ si et seulement si $x=\frac{1}{4}$. De même, $2x+3=0$ si et seulement si $x=-\frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-1)$ $\times(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{4}\right]$.

Exercice 7. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2-x}{5-3x} \geq 0$.

On a $2-x=0$ si et seulement si $x=2$. De même, $5-3x=0$ si et seulement si $x=\frac{5}{3}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2-x}{5-3x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right[\cup [2\,;+\infty[$.