Évaluation

Colinéarité - Fonctions affines

Sujet B 16/02/2022

Compétences : A : /4 ; C : /4 ; D : /4 ; E1 : /4 ; E2 : /2 ; Total : /18

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. Soient $C(7\,;-3)$, $D(-1\,;-1)$ et $E(-4\,;0)$ trois points du plan. Le point C appartient-il à la droite (DE) ?

C appartient à la droite (DE),
si et seulement si C, D et E sont alignés,
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le déterminant

$$d = x_1y_2 - x_2y_1 = (-3)\times 2 - (-8)\times 1 = -6 + 8 = -2.$$

C n'appartient donc pas à (DE).

Exercice 2. Soient $A\,(4\,;-2)$, $B\,(0\,;3)$, $M\,(-3\,;0)$ et $N\,(-6\,;y)$. Déterminer la valeur de y telle que (AB) et (MN) soient parallèles.

(AB) et (MN) sont parallèles
si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3 \\ y \end{pmatrix}$. Le déterminant est nul si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \\ (-4)\times y - 5\times(-3) &= 0 \\ -4y + 15 &= 0 \\ -4y &= -15 \\ y &= \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$, $C\,(x_C\,;y_C)$ et $D\,(x_D\,;y_D)$ quatre points du plan. Compléter l'algorithme suivant visant à déterminer si (AB) et (CD) sont parallèles.

Algorithme 1 : Parallélisme

Données : x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D

Début
- $x_1 \leftarrow x_B - x_A$
- $y_1 \leftarrow y_B - y_A$
- $x_2 \leftarrow x_D - x_C$
- $y_2 \leftarrow x_D - x_C$
- $d \leftarrow x_1y_2 - x_2y_1$
- **Si** $d = 0$ **Alors**
  - **Sorties :** (AB) et (CD) sont parallèles
- **Sinon Si** $d \neq 0$ **Alors**
  - **Sorties :** (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

Fin

Exercice 4. Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = 3\left(\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= 3\left(\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CB}\right)\\ &= 3\overrightarrow{AB} - 12\overrightarrow{CB}\\ &= 3\overrightarrow{AB} - 12\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \quad \text{relation de Chasles}\\ &= 3\overrightarrow{AB} + 12\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AB}\\ &= -9\overrightarrow{AB} + 12\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On en déduit que $-11\overrightarrow{AC} = -9\overrightarrow{AB}$ i.e. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{9}{11}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A, B et C alignés.

Exercice 5. Soit f une fonction affine telle que $f(0) = -3$ et $f(3) = -1$.

1. Déterminer l'expression de f.

f est affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b à déterminer. On a

$$a = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-1 - (-3)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Il faut maintenant déterminer b. On sait que $f(0) = -3$, donc

$$\frac{2}{3} \times 0 + b = -3 \iff b = -3.$$

Donc $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 3$.

2. Déterminer les variations de f, justifier.

On a $a = \dfrac{2}{3} > 0$, donc f est croissante.

Exercice 6. Résoudre l'inéquation $(4x-9)(3x+8) \leq 0$.

On a $4x-9=0$ si et seulement si $x=\dfrac{9}{4}$. De même, $3x+8=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{8}{3}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\dfrac{8}{3}$		$\dfrac{9}{4}$		$+\infty$
$4x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-9)$ $\times(3x+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[-\dfrac{8}{3}\,;\dfrac{9}{4}\right]$.

Exercice 7. Résoudre l'inéquation $\dfrac{6-x}{2-7x} \geq 0$.

On a $6-x=0$ si et seulement si $x=6$. De même, $2-7x=0$ si et seulement si $x=\dfrac{2}{7}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{7}$		6		$+\infty$
$6-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{6-x}{2-7x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{7}\right[\cup [6\,;+\infty[$.