

Évaluation

Fonctions affines et vecteurs

Sujet A

02/02/2022

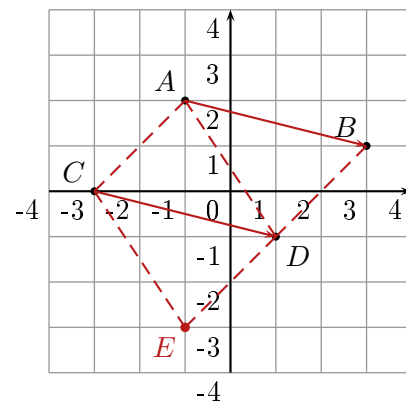
A : /4 ; B : /2 ; C : /4 ; D : /4 ; E : /4 ; Total : /18

Instructions générales :

- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1.

Soient A, B, C et D quatre points du plan représentés ci-contre.



1. Lire les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Par lecture graphique, on trouve

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

3. Calculer les coordonnées du point E tel que $ADEC$ soit un parallélogramme.

$ADEC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$. On a $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On note $(x_E; y_E)$ les coordonnées de E , on a $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E + 3 \\ y_E \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{cases} x_E + 3 = 2, \\ y_E = -3, \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = -1, \\ y_E = -3. \end{cases}$$

Exercice 2. Soient $A(3; -1)$, $B(0; 4)$ et $C(-2; 2)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de même $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\left[3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right] \begin{pmatrix} 3 \times (-3) + \frac{1}{2} \times (-2) \\ 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Soit $M(x; y)$, on a $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x \\ y - 4 \end{pmatrix}$. Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, on a

$$\begin{cases} x = -10, \\ y - 4 = 14, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -10, \\ y = 18. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $(1 - 4x)(6x + 2) \leq 0$.

On a $1 - 4x = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{4}$. De même, $6x + 2 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$1 - 4x$	+	0	0	-
$6x + 2$	-	0	0	+
$(1 - 4x) \times (6x + 2)$	-	0	0	-

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$.

Exercice 4. Résoudre l'inéquation $\frac{-3x+2}{5x+3} \geq 0$.

On a $-3x+2=0$ si et seulement si $x = \frac{2}{3}$. De même, $5x+3=0$ si et seulement si $x = -\frac{3}{5}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3x+2$	+	0	-	
$5x+3$	-	0	+	
$\frac{-3x+2}{5x+3}$	-	+	0	-

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left] -\frac{3}{5}; \frac{2}{3} \right]$.

Exercice 5. Soit f une fonction affine telle que $f(-1) = 7$ et $f(3) = 2$.

1. Déterminer l'expression de f .

f est affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b à déterminer. On a

$$a = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{2 - 7}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Il faut maintenant déterminer b . On sait que $f(-1) = 7$, donc

$$-\frac{5}{4} \times (-1) + b = 7 \iff b = 7 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}.$$

Donc $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{23}{4}$.

2. Déterminer les variations de f , justifier.

On a $a = -\frac{5}{4} < 0$, donc f est décroissante.

Exercice 6. Vous avez besoin d'acheter un véhicule pour vous déplacer et hésitez entre deux modèles vendus par la Multinationale : la iCar E, citadine électrique, et la iCar T, citadine thermique (ou essence). Dans les deux cas, la iCar peut se connecter à votre iTruc et vous offre tous les iServices habituels sans frais supplémentaires. La iCar E est vendue 20 000€ et la iCar T 15 000€. Afin de faire le meilleur investissement possible, vous souhaitez tenir compte des coûts de l'électricité et du carburant à l'usage dans chacun des deux cas. On estime actuellement qu'il faut 3€ d'électricité et 8€ d'essence pour faire 100km et que ce coût restera fixe dans les années à venir. On ne considérera ni les coûts d'entretiens ni les aides fiscales afin de simplifier le problème.

On note x le nombre de centaines de kilomètres parcourus une fois la iCar achetée.

1. Donner l'expression de la fonction f donnant le coût total de la iCar E en fonction du nombre x de centaines de kilomètres parcourus plus son prix d'achat. Quelle est la nature de la fonction f ?

On a

$$f(x) = \text{prix d'achat} + \text{prix électricité} \times \text{nombre de kilomètres} = 20000 + 3x.$$

f est fonction affine car de la forme $f(x) = ax + b$.

2. Donner l'expression de la fonction g donnant le coût total de la iCar T en fonction du nombre x de centaines de kilomètres parcourus plus son prix d'achat. Quelle est la nature de la fonction g ?

On a

$$g(x) = \text{prix d'achat} + \text{prix essence} \times \text{nombre de kilomètres} = 15000 + 8x.$$

g est fonction affine car de la forme $g(x) = ax + b$.

3. Déterminer à partir de combien de kilomètres parcourus la iCar E coûte moins cher que la iCar T.

On cherche x tel que $f(x) \leq g(x)$:

$$20000 + 3x \leq 15000 + 8x$$

$$5000 + 3x \leq 8x$$

$$5000 \leq 5x$$

$$1000 \leq x.$$

Comme x est en centaines de kilomètres, il faudra parcourir au moins $100 \times 1000 = 100\,000$ kilomètres pour que la iCar E soit plus rentable que la T.