Évaluation

Fonctions affines et vecteurs

Sujet B 02/02/2022

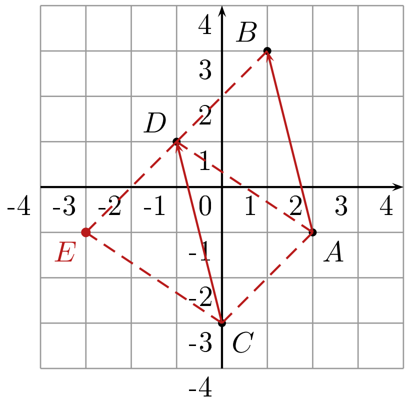
A : /4 ; B : /2 ; C : /4 ; D : /4 ; E : /4 ; Total : /18

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1.

Soient A, B, C et D quatre points du plan représentés ci-contre.



1. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Par lecture graphique, on trouve

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

3. Calculer les coordonnées du point E tel que $ADEC$ soit un parallélogramme.

$ADEC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On note $(x_E\,;y_E)$ les coordonnées de E, on a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{cases} x_E = -3, \\ y_E + 3 = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = -3, \\ y_E = -1. \end{cases}$$

Exercice 2. Soient $A\,(-1\,;3)$, $B\,(4\,;0)$ et $C\,(2\,;-2)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\left[3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]\begin{pmatrix} 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times (-2) \\ 3 \times (-3) + \frac{1}{2} \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Soit $M\,(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix}$. Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, on a

$$\begin{cases} x - 4 = 14, \\ y = -10, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 18, \\ y = -10. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $(3-6x)(5x+1) \leq 0$.

On a $3 - 6x = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$. De même, $5x + 1 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{5}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-6x)$ $\times(5x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4. Résoudre l'inéquation $\dfrac{6-5x}{2x+4} \geq 0$.

On a $6-5x=0$ si et seulement si $x=\dfrac{6}{5}$. De même, $2x+4=0$ si et seulement si $x=-2$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		$\dfrac{6}{5}$		$+\infty$
$6-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{6-5x}{2x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-2\,;\dfrac{6}{5}\right]$.

Exercice 5. Soit f une fonction affine telle que $f(-2)=1$ et $f(4)=8$.

1. Déterminer l'expression de f.

f est affine donc de la forme $f(x)=ax+b$ avec a et b à déterminer. On a

$$a=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{8-1}{6}=\frac{7}{6}.$$

Il faut maintenant déterminer b. On sait que $f(-2)=1$, donc

$$\frac{7}{6}\times(-2)+b=1 \iff b=1+\frac{7}{3}=\frac{10}{3}.$$

Donc $f(x)=\dfrac{7}{6}x+\dfrac{10}{3}$.

2. Déterminer les variations de f, justifier.

On a $a=\dfrac{7}{6}>0$, donc f est croissante.

Exercice 6. Vous avez besoin d'acheter un véhicule pour vous déplacer et hésitez entre deux modèles vendus par la Multinationale : la iCar E, citadine électrique, et la iCar T, citadine thermique (ou essence). Dans les deux cas, la iCar peut se connecter à votre iTruc et vous offre tous les iServices habituels sans frais supplémentaires. La iCar E est vendue 20 000€ et la iCar T 15 000€. Afin de faire le meilleur investissement possible, vous souhaitez tenir compte des coûts de l'électricité et du carburant à l'usage dans chacun des deux cas. On estime actuellement qu'il faut 3€ d'électricité et 8€ d'essence pour faire 100km et que ce coût restera fixe dans les années à venir. On ne considérera ni les coûts d'entretiens ni les aides fiscales afin de simplifier le problème.

On note x le nombre de centaines de kilomètres parcourus une fois la iCar achetée.

1. Donner l'expression de la fonction f donnant le coût total de la iCar E en fonction du nombre x de centaines de kilomètres parcourus plus son prix d'achat. Quelle est la nature de la fonction f ?

On a

$$f(x) = \text{prix d'achat} + \text{prix électricité} \times \text{nombre de kilomètres} = 20000 + 3x.$$

f est fonction affine car de la forme $f(x) = ax + b$.

2. Donner l'expression de la fonction g donnant le coût total de la iCar T en fonction du nombre x de centaines de kilomètres parcourus plus son prix d'achat. Quelle est la nature de la fonction g ?

On a

$$g(x) = \text{prix d'achat} + \text{prix essence} \times \text{nombre de kilomètres} = 15000 + 8x.$$

g est fonction affine car de la forme $g(x) = ax + b$.

3. Déterminer à partir de combien de kilomètres parcourus la iCar E coûte moins cher que la iCar T.

On cherche x tel que $f(x) \leq g(x)$:

$$\begin{aligned} 20000 + 3x &\leq 15000 + 8x \\ 5000 + 3x &\leq 8x \\ 5000 &\leq 5x \\ 1000 &\leq x. \end{aligned}$$

Comme x est en centaines de kilomètres, il faudra parcourir au moins 100×1000 =100 000 kilomètres pour que la iCar E soit plus rentable que la T.