Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Suites usuelles

Sujet B 18/03/2021

Note et remarques : /15

Instructions générales :
- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans la l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/5)

Un panneau solaire de 1m^2 correctement orienté produit en France environ $95\text{kW}\cdot\text{h/an}$ sa première année d'utilisation. On estime ensuite que chaque année, la quantité d'énergie qu'il convertit diminue de 2% par rapport à l'année précédente. On considère l'installation comme rentable financièrement si la quantité totale d'énergie produite par le panneau au cours de son service est supérieure à $3000\text{kW}\cdot\text{h}$. On note e_n la quantité d'énergie produite par le panneau sa n-ième année de vie.

1. Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n. Quelle est la nature de la suite (e_n) ? Justifier. Préciser sa raison et son terme général.

Ayant une diminution annuelle de 2%, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e_{n+1} = e_n - 0,02e_n = 0,98e_n.$$

(e_n) est donc géométrique de raison 0,98 et son terme général est

$$e_n = e_1 \times 0,98^{n-1}.$$

2. Calculer la quantité d'énergie que le panneau solaire produira la vingtième année. On arrondira à l'unité.

On cherche donc e_{20}. On a

$$e_{20} = 95 \times 0,98^{20-1} \simeq 65.$$

Le panneau produira $65\text{kW}\cdot\text{h}$ sa vingtième année.

3. On note E_n la quantité totale d'énergie que le panneau aura produit de son installation à la fin de sa année n-ième année de service. Exprimer E_n en fonction de n.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} e_k = e_1 \frac{1 - 0,98^{n-1+1}}{1 - 0,98} = 95 \times \frac{1 - 0,98^n}{0,02}.$$

4. En supposant que le panneau solaire ait une durée de vie infinie, atteint-il le seuil de rentabilité financière ? *Indication :* on pourra calculer l'énergie totale E produite par le panneau s'il a une vie infinie.

L'énergie totale produite par le panneau s'il a une durée de vie infinie est

$$E = \lim_{n\to+\infty} E_n = 95 \times \frac{1}{0,02} \simeq 4750.$$

En effet, comme $0,98 \in]0\,;1[$, $0,98 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Comme $E > 3000$, le panneau est rentable financièrement.

5. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine la première année où le panneau est rentable.

Algorithme 1 : Recherche de seuil

Début
- $n \longleftarrow 1$
- $e \longleftarrow 95$
- $E \longleftarrow e$
- **Tant que** $E < 3000$
- **Faire**
  - $n \leftarrow n+1$
  - $e \leftarrow e \times 0,98$
  - $E \leftarrow E + e$
- **Sorties :** n

Fin

Exercice 2. (/6)

Suite à l'incident de l'explosion du labo nord à cause d'un composant électronique mal placé dans une évaluation précédente, la Multinationale a décidé de vous muter dans son département de biologie ; votre $n+1$ voulait vous licencier mais son $n+1$ l'a licencié d'abord tant et si bien que plus personne ne sait qui vous êtes ni ce que vous avez fait.

Le département de biologie prévoit la fabrication du iBiotic, un médicament de type probiotique. Pour cela, il doit produire une certaine bactérie qui servira de base au médicament. Une fois mises en culture, la quantité de bactéries croît de 25% par jour. Toutefois, une opération journalière de maintenance sur la cuve de culture engendre une perte de 150g de bactéries. Le département se fixe un objectif de 40kg de production et souhaite savoir combien de jours cela prendra. On met initialement 1kg de bactéries en culture. On note b_n la quantité de bactéries au jour n après l'opération de maintenance ; on a $b_0 = 1000$.

1. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chaque jour l'augmentation de 25% de la quantité de bactéries et la perte de 150g donnent

$$b_{n+1} = b_n + 0,25b_n - 150 = 1,25b_n - 150.$$

2. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = b_n - 600$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 1,25.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= b_{n+1} - 600 \\ &= 1,25b_n - 150 - 600 \\ &= 1,25b_n - 750 \\ &= 1,25(b_n - 600) \\ &= 1,25v_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien géométrique de raison 1,25.

3. En déduire l'expression de (v_n) puis de (b_n) pour tout n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, (v_n) étant géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = b_0 - 600 = 1000 - 600 = 400$, on a

$$v_n = v_0 \times 1,25^n = 400 \times 1,25^n.$$

On a donc

$$b_n = v_n + 600 = 400 \times 1,25^n + 600.$$

4. Montrer que (b_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 400 \times 1,25^{n+1} + 600 - (400 \times 1,25^n + 600) \\ &= 400 \times 1,25^{n+1} - 400 \times 1,25^n \\ &= 400 \times 1,25^n(1,25 - 1) \\ &= 400 \times 1,25^n \times 0,25 \\ &= 100 \times 1,25^n \\ &> 0. \end{aligned}$$

On en déduit que (h_n) est strictement croissante.

5. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine le premier jour où la quantité de bactéries produites est supérieure à 40kg.

Algorithme 2 : Recherche de seuil

Début
  $n \longleftarrow 0$
  $b \longleftarrow 1000$
  Tant que $b < 40000$
  Faire
    $n \leftarrow n + 1$
    $b \leftarrow 400 \times 1,25^n + 600$
  Sorties : n
Fin

Exercice 3. (/4)

L'accélération de pesanteur vaut sur Terre environ $9,8\text{m.s}^{-2}$. Elle signifie qu'un corps en chute libre parcourt à chaque seconde 9,8m de plus qu'à la seconde précédente. Pour les besoins de cet exercice, vous allez devoir vous placer en situation de chute libre (vous négligerez habilement les frottements de l'air) ; vous allez donc sauter en parachute ! Lors de la première seconde, vous avez approximativement parcouru 4m. On note d_n la distance parcourue en chute libre lors de la n-ième seconde.

1. Déterminer d_1 et d_2.

On a $d_1 = 4$ d'après l'énoncé et $d_2 = d_1 + 9,8 = 13,8$.

2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Préciser sa raison et son terme général.

On a $d_{n+1} = d_n + 9,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; (d_n) est donc arithmétique de raison 9,8. Son terme général est

$$d_n = d_1 + 9,8(n-1) = 4 + 9,8n - 9,8 = -5,8 + 9,8n.$$

3. Calculer la distance parcourue lors de la cinquième seconde.

On cherche donc d_5. On a

$$d_5 = -5,8 + 9,8 \times 5 = 43,2.$$

Vous allez parcourir 44,2m lors de la cinquième seconde.

4. Sachant que vous souhaitez être en chute libre pendant trente secondes, à quelle altitude minimale votre avion devra-t-il voler lorsque vous en sauterez ?

Il faut calculer la distance parcourue lors des trente secondes de saut :

$$\sum_{k=1}^{30} = \frac{(30-1+1)(d_1 + d_{30})}{2} = 4383.$$

Sachant que vous allez chuter de 4383m, cela devra donc être l'altitude minimale de votre avion. Toutefois, afin d'envisager l'atterrissage sereinement, vous devriez prévoir un peu plus.