

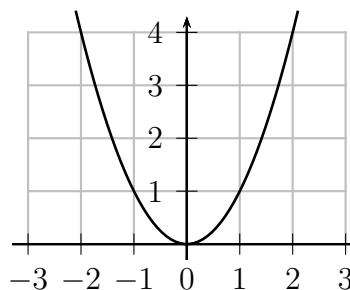
Chapitre 11

Fonctions carré et cube

11.1 Fonction carré

Définition 11.1. La fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f(x) = x^2$ est appelée **fonction carré**.

Représentation graphique : la fonction carrée admet pour représentation graphique la **parabole** ci-contre.



Propriété 11.1.

1. La fonction carré est positive sur \mathbb{R} : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

↘ ↗

3. La fonction carrée est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Démonstration. Le point 1. est évident et le point 3. laissé en exercice. Montrons le point 2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On note $f(x) = x^2$. Il s'agit d'étudier le signe de $f(y) - f(x)$:

$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Comme $x < y$, on a $y - x > 0$. Reste à voir le signe de $y + x$.

Cas $x < y < 0$: on a alors $x + y < 0$ et donc $f(y) - f(x) < 0$ donc $f(y) < f(x)$, i.e. f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Cas $0 < x < y$: on a alors $x + y > 0$ et donc $f(y) - f(x) > 0$ donc $f(x) < f(y)$, i.e. f est croissante sur $[0; +\infty[$.

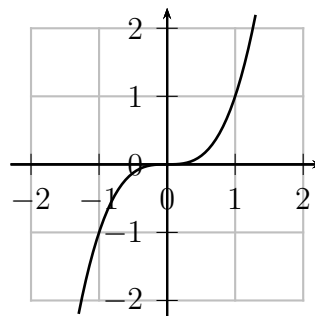
□

★ Vidéo.

11.2 Fonction cube

Définition 11.2. La fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f(x) = x^3$ est appelée **fonction cube**.

Représentation graphique : la fonction carrée admet pour représentation graphique la courbe ci-contre.



Propriété 11.2.

1. La fonction cube est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	-	0	+

2. La fonction cube est croissante sur \mathbb{R} .

3. La fonction cube est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^3 = -x^3$.

Démonstration. Exercices. □

11.3 Positions relatives

Définition 11.3. [Rappels] Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} . On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives de f et g . On dira que \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g – respectivement en dessous – sur un sous-intervalle J de I si pour tout $x \in J$, on a $f(x) \geq g(x)$ – respectivement $f(x) \leq g(x)$.

On pose f et g définies sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Pour étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , il faut déterminer le signe de $f - g$:

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x).$$

On a

x	0	1	$+\infty$
x	+	+	+
$1 - x$	+	0	-
$f - g$	+	0	-

Donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur $[0; 1]$ et en dessous sur $[1; +\infty[$.

11.4 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les propriétés des fonctions carrée et cube.
- Comparer les fonctions carrée et cube entre elles et à d'autres fonctions.

11.5 Exercices

11.5.1 Démarrage

Exercice 11.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction carré est 9.
2. L'image de -3 par la fonction carré est -9.
3. Un antécédent de 16 par la fonction carré est -4.
4. Un antécédent de -16 par la fonction carré est -4.

Exercice 11.2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | | |
|-----------------|--------------------|-------------------|
| 1. $x^2 = 25$. | 3. $3x^2 = 27$. | 5. $x^2 < -1$. |
| 2. $x^2 = -2$. | 4. $x^2 \leq 16$. | 6. $x^2 \geq 0$. |

Exercice 11.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

- | | | |
|------------|----------------|-----------------|
| 1. x^2 . | 2. $x^2 + 3$. | 3. $5x^2 - 1$. |
|------------|----------------|-----------------|

Exercice 11.4.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = x^2 - 3$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_- par $f(x) = -5x^2 + 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_- .

Exercice 11.5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction cube est 9.
2. L'image de -3 par la fonction cube est -27.
3. Un antécédent de -27 par la fonction cube est 3.
4. Un antécédent de 64 par la fonction cube est -4.

Exercice 11.6. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | | |
|------------------|--------------------|-------------------|
| 1. $x^3 = 8$. | 3. $x^3 = -64$. | 5. $x^3 < -1$. |
| 2. $x^3 = -27$. | 4. $x^3 \leq 64$. | 6. $x^3 \geq 0$. |

Exercice 11.7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. x^3 .
2. $x^3 + 3$.
3. $-5x^3 - 1$.

Exercice 11.8.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3$ est croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -5x^3 + 1$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Exercice 11.9. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

11.5.2 Approfondissement

Exercice 11.10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. x^2 .
2. $x^2 - 3$.
3. $-5x^2 + 1$.

Exercice 11.11. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(3x - 2)^2 = 25$.
2. $(-4x + 1)^2 = 0$.
3. $x^2 > 16$.
4. $x^2 > 0$.
5. $4 \leq x^2 \leq 16$.
6. $10 < x^2 + 1 \leq 37$.

Exercice 11.12.

1. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 + 4x)^2 - 3$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$.
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 - (1 - 3x)^2$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Exercice 11.13. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(x + 3)^3 = 8$.
2. $-(2x + 1)^3 = 27$.
3. $(5 - x)^3 = -64$.
4. $8 < x^3 \leq 64$.
5. $-27 \leq x^3 < -1$.
6. $-64 < x^3 \leq 125$.

Exercice 11.14. [Démonstration]

1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy).$$

2. En déduire que la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , et sur \mathbb{R}_- .

Exercice 11.15.

1. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 + 4x)^3 - 3$ est croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 - (1 - 3x)^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 11.16. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 11.17. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x^3$ et $g(x) = -2x^2$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 11.18. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(t) = 2t^2$ et $g(t) = -3t^2 - 5$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 11.19. [Démonstration]

1. Montrer que le fonction carrée est impaire.
2. Montrer que le fonction cube est impaire.

Exercice 11.20. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^3$.
2. $g(x) = -2x^2 + 3x^4$.
3. $h(x) = x - x^2$.

Exercice 11.21. [Optimisation et Magie] Fred et Georges souhaitent fabriquer une boîte magique de 3m^3 dont eux seuls pourraient voir le contenu afin d'y cacher toute leur production de farces et attrapes. Pour cela, il dispose de 12m^2 d'un bois spécialement enchanté pour cet effet. Ils décident de construire leur boîte sous forme de cube et demandent à Hermione son aide pour savoir s'ils ont assez de bois.

1. On note x la longueur d'une arête du cube à construire. Exprimer en fonction de x la surface $S(x)$ de la boîte.
2. En déduire la longueur de l'arête de la plus grosse boîte que l'on puisse réaliser avec 12m^2 de bois.
3. Quel serait le volume de cette boîte ? Que doit répondre Hermione aux jumeaux Weasley ?

11.5.3 Entraînement

Exercice 11.22. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $3x^2 - 2 = 25$.
2. $-x^2 + 4 = 0$.
3. $4x^2 < 16$.
4. $-3x^2 < -27$.
5. $25 \leq x^2 \leq 121$.
6. $54 < x^2 + 5 \leq 150$.

Exercice 11.23. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-5 \leq x < -2$, déterminer un encadrement de

1. x^2 .
2. $x^2 - 4$.
3. $-2x^2 + 4$.

Exercice 11.24. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(x - 5)^3 = -8$.
2. $(9x + 3)^3 = 27$.
3. $(5 - x)^3 = 125$.
4. $-64 < x^3$.
5. $-27 \leq x^3 < 8$.
6. $-125 \leq x^3 < 125$.

Exercice 11.25. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-3 < x \leq 1$, déterminer un encadrement de

1. x^3 .

2. $x^3 - 1$.

3. $-7x^3 + 4$.

Exercice 11.26.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_- par $g(x) = -4x^2 + 3$ est croissante sur \mathbb{R}_- .

2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_- par $g(x) = 2 - (1 - x)^2$ est croissante sur $]-\infty ; 1]$.

3. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -5x^3 + 1$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

4. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 5(3 - 5x)^3$ est décroissante sur \mathbb{R} .

Exercice 11.27. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^3$ et $g(x) = 8x^2$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .