Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Variables aléatoires

Sujet B 08/04/2022

Note et remarques : $/15$

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/5)

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité ci-dessous.

x_i	-3	0	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,25$	$0,35$	$0,4$

1. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

2. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X.

Algorithme 1 : Simulation de variable aléatoire

alea $\longleftarrow$ nombre aléatoire entre 0 et 1
Si *alea* $< 0,25$ **Alors**
  $X \leftarrow -3$
Si *alea* $< 0,6$ **Alors**
  $X \leftarrow 0$
Sinon
  $X \leftarrow 2$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{3} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = -3 \times 0,25 + 0 \times 0,35 + 3 \times 0,4 = 0,45.$$

4. On pose $Y = X^2$. Donner les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y, sa loi de probabilité puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Y peut prendre les valeurs 0 et 9. Sa loi de probabilité est

y_i	0	9
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$0,35$	$0,65$

On a

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times 0,35 + 0,65 \times 9 = 5,85.$$

5. En déduire la variance et l'écart-type de X. On arrondira au centième.

La variance de X vaut d'après le théorème de Huyghens-König

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)^2 = 5,85 - 0,45^2 = 5,6475.$$

On en déduit que l'écart-type de X vaut

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \simeq 2,38.$$

Exercice 2. (/10)

Suite à un plan de délocalisation, la Multinationale a décidé de vous licencier. Un dirigeant de casino interprété par un certain Robert a eu vent de vos talents mathématiques et à décidé de vous faire créer un nouveau jeu pour son casino. Faute de mieux, vous acceptez ce travail. Le joueur pourrait perdre 20 ou 40€, gagner 100€ ou ne réaliser ni gain ni perte.

1. Vous proposez à Robert de fixer à p la probabilité de perdre 20€, p^2 celle de perdre 40€ et p^3 celle de gagner 100€. Mais Robert à l'air septique, prouvez-lui que $0 \leq p^3 \leq p^2 \leq p < 1$.

p étant une probabilité on a $p \in [0\,;1]$, la suite géométrique de terme général p^n est alors décroissante et on a donc

$$0 \leq p^3 \leq p^2 \leq p \leq p^0 = 1.$$

On a enfin $p < 1$ car sinon la probabilité d'avoir un gain nul est négative.

2. On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de G ci-dessous.

g_i	-40	-20	0	100
$\mathbb{P}(G = g_i)$	p^2	p	$1 - (p + p^2 + p^3)$	p^3

3. Robert ne se montre pas très intéressé par vos histoires de variables aléatoires. Il souhaite juste que l'espérance de gain du joueur soit négative (pour que la sienne soit positive). Exprimer en fonction de p l'espérance de gain du joueur.

L'espérance de G est

$$\mathbb{E}(G) = 100p^3 - 40p^2 - 20p.$$

4. Déterminer pour quelles valeurs de p l'espérance de gain est négative. *Indication :* penser à faire une factorisation.

L'espérance de gain est négative si et seulement si $\mathbb{E}(G) = 0$. On cherche donc à résoudre l'équation

$$\mathbb{E}(G) = 100p^3 - 40p^2 - 20p \leq 0.$$

En factorisant par p, on obtient

$$\mathbb{E}(G) = p(100p^2 - 40p - 20).$$

Comme $p \in [0\,;1[$, $\mathbb{E}(G)$ est signe du polynôme $100p^2 - 40p - 20$. Pour cela, on calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \times 100 \times (-20) = 9600.$$

Ce dernier étant positif, notre polynôme admet deux racines :

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \simeq -0,29 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \simeq 0.69.$$

Comme $a = 100 > 0$, on en déduit que

p	0		0.69		1
$E(G)$		$-$	0	$+$	

Il faut donc fixer p dans l'intervalle $[0\,;0,69]$ pour que l'espérance de gain soit négative.

5. Robert en veut plus ! Afin de maximiser ses bénéfices, déterminer la valeur de p pour laquelle l'espérance de gain est minimale.

On pose $g(p) = 100p^3 - 40p^2 - 20p$ pour tout $p \in [0\,;1[$. g est dérivable, on va donc la dériver afin de déterminer ses variations et ses éventuels extremums.

Pour tout $p \in [0\,;1[$, on a $g'(p) = 300p^2 - 80p - 20$. Déterminons son signe afin d'en déduire les variations de g.

g' est un polynôme de degré 2, on va étudier son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30400.$$

g' a donc deux racines :

$$p_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \simeq -0,16 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \simeq 0,42.$$

Comme le coefficient dominant $a = 300$ de g' est positif, on a

p	0		0.42		1
$g'(p)$		$-$	0	$+$	
$g(p)$	0	$\searrow$	-8.05	$\nearrow$	40

L'espérance de gain est minimale pour $p \simeq 0,42$.