Chapitre 12

Équations de droites

12.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 12.1. *Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. On dit que $\vec{u}$ est un* ***vecteur directeur*** *de $\mathscr{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Propriété 12.1. *Soient $\mathscr{D}$ une droite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On suppose que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire $\vec{u}$.*

Exemples : Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan dont $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.Alors $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ car ils sont colinéaires à $\vec{u}_1$; *a contrario*, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ car il n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$: On suppose que $\vec{v}$ dirige $\mathscr{D}$. Il existe donc quatre points A, B, C, D de $\mathscr{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Ces points étant alignés, on en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ – et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ – sont colinéaires.

$\Longleftarrow$: On suppose que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Comme $\vec{u}$ dirige $\mathscr{D}$, il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Notons C l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$, autrement dit $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Comme les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, on en déduit que les points A, B et C sont alignés et donc que $C \in (AB)$. Finalement $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ avec A et C points de $\mathscr{D}$. La droite $\mathscr{D}$ est bien dirigée par $\vec{v}$.

□

12.2 Équations cartésiennes

Théorème 12.1. *Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. Alors il existe trois nombres réels a, b et c (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ vérifiant*

$$ax + by + c = 0.$$

On appelle cette forme d'équation de $\mathscr{D}$ une ***équation cartésienne****.*

Exemples : $3x - y + 1 = 0$, $2y + 5 = 0$ et $x - 1 = 0$ sont des équations cartésiennes où le triplet $(a\,;b\,;c)$ est respectivement égal à $(3\,;-1\,;1)$, $(0\,;2\,;5)$ et $(1\,;0\,;-1)$.

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$ et $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff A, B \text{ et } M \text{ sont alignés}\\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0\\
&\iff (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = 0\\
&\iff ax + by + c = 0,
\end{aligned}$$

en ayant choisi :

$$\begin{cases} a &= y_A - y_B \\ b &= x_B - x_A \\ c &= y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = x_A y_B - x_B y_A. \end{cases}$$

On a bien $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ car les points A et B sont distincts. □

Remarque : Le triplet $(a\,;b\,;c)$ n'est pas unique.

Propriété 12.2. *Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$, alors le vecteur du plan $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.*

Remarque : le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, en effet il est colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ puisque $\vec{v} = -\vec{u}$.

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$. Par hypothèse, on a :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

Montrons que $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned}
b(y_B - y_A) - (-a)(x_B - x_A) &= by_B - by_A + ax_B - ax_A\\
&= ax_B + by_B - (ax_A + by_A)\\
&= -c - (-c)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par définition, $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. □

Exemples :

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x-4y+2=0$. Montrons que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1,5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. D'après la propriété ci-dessus, $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Comme $\vec{v}=-2\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

2. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites du plan d'équations respectives :
$$5x+ky-2=0 \quad \text{et} \quad kx+2y+1=0.$$
Pour quelle(s) valeur(s) de k les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont-elles parallèles ?

   $\vec{u}_1\begin{pmatrix}k\\-5\end{pmatrix}$ – respectivement $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\-k\end{pmatrix}$ – est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ – respectivement $\mathscr{D}_2$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si
$$10-k^2=0 \iff k=\pm\sqrt{10}.$$

Propriété 12.3. *Soient α et β deux nombres réels avec $\alpha\neq 0$ ou $\beta\neq 0$. Si $\mathscr{D}$ est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$, alors il existe un réel c tel que $\beta x-\alpha y+c=0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $M(x\,;y)$ deux points de $\mathscr{D}$. Si A et M sont distincts, alors $\overrightarrow{AM}$ dirige $\mathscr{D}$. Sinon, $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur nul. Dans les deux cas, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires :
$$\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \iff \beta x-\alpha y+\alpha y_A-\beta x_A=0.$$
Ainsi les coordonnées de M vérifient l'équation $\beta x-\alpha y+c=0$ en notant $c=\alpha y_A-\beta x_A$. $\square$

Exemple : Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(3\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ de deux façons différentes.

1. Il existe un réel c tel que $1x-2y+c=0$ soit une équation de $\mathscr{D}$. Or $A\in\mathscr{D}$, on en déduit : $x_A-2y_A+c=0 \iff 3-2\times 4+c=0 \iff c=5$.
2. Soit $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{D}$. On sait que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires, d'où :
$$1(x-3)-2(y-4)=0 \iff x-2y+5=0.$$

12.3 Équations réduites de droites

Propriété 12.4. *Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.*

1. *Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un réel k tel que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ de même abscisse k : $x = k$ est une équation de $\mathscr{D}$.*
2. *Si $\mathscr{D}$ n'est parallèle pas à l'axe des ordonnées, alors il existe deux réels m et p tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ vérifiant l'équation*

$$y = mx + p.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemples :

— $y = 2x + 5$ et $x = -2$ sont des équations de droites.

— $y = x^2$ et $y = x + \sqrt{x}$ ne sont pas des équations de droites.

Définition 12.2. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = mx + p$.*

— *Le réel m est appelé **coefficient directeur**.*

— *Le réel p est appelé **ordonnée à l'origine**.*

Propriété 12.5. *Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemples On a $A\,(-4\,;-3)$ et $B\,(5\,;-1)$, alors

$$m = \frac{-1 - (-4)}{5 - (-3)} = \frac{3}{8}.$$

Démonstration. Soit m le coefficient directeur de la droite (AB) et p son ordonnée à l'origine ; (AB) a donc pour équation $y = mx + p$. Comme $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$, on a

$$y_A = mx_A + p \quad \text{et} \quad y_B = mx_B + p.$$

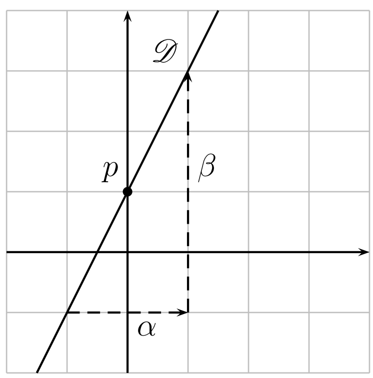
On a alors

$$y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = m(x_B - x_A).$$

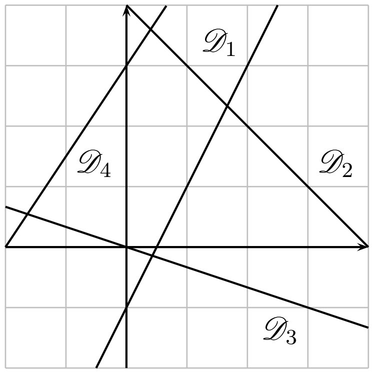
Comme $x_A \neq x_B$, on a $x_B - x_A \neq 0$ et donc $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. □

— La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $(0\,;p)$.

— On lit m en lisant les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et en effectuant la division $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$. C'est une conséquence directe de la propriété précédente.



Droite	m	p
$\mathscr{D}_1$	2	-1
$\mathscr{D}_2$	-1	4
$\mathscr{D}_3$	$\frac{1}{3}$	0
$\mathscr{D}_4$	$\frac{3}{2}$	3



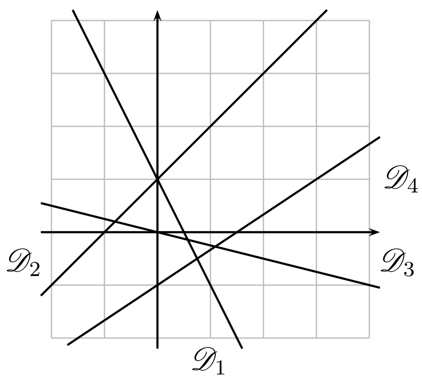
12.4 Attendus et savoir-faire :

- Déterminer si une équation est celle d'une droite ou pas.
- Tracer une droite.
- Déterminer l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique, et donc son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
- Déterminer l'équation d'une droite sachant qu'elle passe par deux points dont on connaît les coordonnées.
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne.
- Déterminer si deux droites sont parallèles à partir de leurs équations cartésiennes.
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite sachant qu'elle est est parallèle à une seconde dont on connaît l'équation cartésienne.
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un vecteur directeur et un point lui appartenant.

12.5 Exercices

12.5.1 Démarrage

Exercice 12.1. Donner pour chacune des droites suivantes deux vecteurs directeurs.



Exercice 12.2. Dans chaque cas, tracer la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$ et donner deux autres vecteurs directeurs de directions opposées.

1. $\vec{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A\,(3\,;1)$.
2. $\vec{d}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A\,(-2\,;0)$.
3. $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\,(5\,;-1)$.
4. $\vec{d}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\,(-1\,;1)$.

Exercice 12.3. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations de droites ? Justifier.

1. $3y = 2 - 4x$.
2. $-3(1+x) + y = 0$.
3. $(1+y)(1-x) = 0$.
4. $xy = 5$.
5. $\dfrac{1}{x} - y + 5 = 0$
6. $\dfrac{x+y}{3} - \dfrac{1}{4} = 0$.
7. $\sqrt{x+y-3} = 0$.

Exercice 12.4. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $3x + y - 1 = 0$.
2. $-2x + 7y + 3 = 0$.
3. $x - 4y = 0$.
4. $9y + 7 = 0$.

Exercice 12.5. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D}\ :\ x + 4y - 20 = 0$ et $A\,(-4\,;9)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ \dfrac{-2}{3}x + 2y - \dfrac{2}{3} = 0$ et $A\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ 2x - 3y - 1 = 0$ et $A\,(12\,;5)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ \dfrac{-4}{5}x - \dfrac{1}{2}y - 1 = 0$ et $A\left(\dfrac{1}{2}\,;3\right)$.

Exercice 12.6. Donner l'équation réduite des droites d'équations cartésiennes ci-dessous.

1. $-2x + 3y + 1 = 0$.
2. $7x + 5y - 2 = 0$.
3. $\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{4}y = 0$.

Exercice 12.7. Déterminer les équations réduites de l'exercice 12.1.

Exercice 12.8. Dans chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et de coefficient directeur m puis tracer la droite dans un repère.

1. $A\,(5\,;-2)$ et $m = -3$.
2. $A\,(5\,;-1)$ et $m = \dfrac{1}{3}$.
3. $A\left(-\dfrac{1}{7}\,;\dfrac{3}{7}\right)$ et $m = -2$.

12.5.2 Appronfondissement

Exercice 12.9. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A\,(1\,;0)$ et $B\,(0\,;1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A\,(2\,;3)$ et $B\,(-3\,;4)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. $A\,(-1\,;4)$ et $B\,(-2\,;6)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. $A\,(4\,;-2)$ et $B\,(1\,;1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.10. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(-5\,;y)$ et $3x - 2y + 1 = 0$.
2. $A\left(x\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $7x + y - 1 = 0$.
3. $A\left(x\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{4} = 0$.

Exercice 12.11. Déterminer les équations cartésiennes des droites des exercices 12.1 et 12.2.

Exercice 12.12. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;1)$ et $C\,(3\,;-2)$.
2. $A\,(1\,;-3)$, $B\,(2\,;1)$ et $C\,(1\,;1)$.

Exercice 12.13. [**] Soit $\mathscr{D}_k$ la droite d'équation

$$(k+2)x+(2k+2)y+2=0,$$

où $k \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer et construire les droites $\mathscr{D}_k$ pour $k=-1$, $k=0$ et $k=1$.
2. Déterminer les droites $\mathscr{D}_k$ qui sont parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées.
3. Existe-t-il une droite $\mathscr{D}_k$ qui passe par le point $A\,(16\,;-2)$? – par $B\,(-6\,;3)$?

Exercice 12.14. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(1\,;2)$ et $B\,(3\,;4)$.
2. $A\left(-\sqrt{3}\,;-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(2\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.
3. $A\left(\dfrac{2}{3}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 12.15. [**] Soit $\mathscr{D}_k$ la droite d'équation

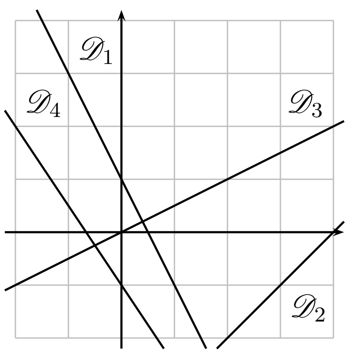
$$2x+ky+5=0,$$

où $k \in \mathbb{R}$. Est-il possible de trouver k tel que :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de $\mathscr{D}_k$?
2. $E\,(4\,;-1)$ appartienne à $\mathscr{D}_k$?
3. $\mathscr{D}_k$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
4. la pente de $\mathscr{D}_k$ soit égale à 7 ?
5. $\mathscr{D}_k$ passe par l'origine ?

12.5.3 Entraînement

Exercice 12.16. Donner pour chacune des droites suivantes deux vecteurs directeurs.



Exercice 12.17. Dans chaque cas, tracer la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$ et donner deux autres vecteurs directeurs de directions opposées.

1. $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\,(3\,;1)$.
2. $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\,(-2\,;0)$.
3. $\vec{d}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\,(7\,;1)$.
4. $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $A\,(1\,;1)$.

Exercice 12.18. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $-x - y - 1 = 0.$
2. $-4x + 6y + 3 = 0.$
3. $x - y = 0.$
4. $9x + 7 = 0.$

Exercice 12.19. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(x\,;-5)$ et $3x - 2y + 1 = 0.$
2. $A\left(\frac{1}{2}\,;y\right)$ et $7x + y - 1 = 0.$
3. $A\left(\frac{4}{3}\,;y\right)$ et $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4} = 0.$

Exercice 12.20. Déterminer les équations cartésiennes des droites des exercices 12.16 et 12.17.

Exercice 12.21. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A\,(-2\,;-2)$, $B\,(1\,;6)$ et $C\,(-5\,;-2)$.
2. $A\,(-5\,;-3)$, $B\,(-2\,;1)$ et $C\,(-7\,;0)$.

Exercice 12.22. Déterminer les équations réduites de l'exercice 12.16.

Exercice 12.23. Dans chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et de coefficient directeur m puis tracer la droite dans un repère.

1. $A\,(-2\,;2)$ et $m = -5.$
2. $A\,(5\,;1)$ et $m = \frac{3}{4}.$
3. $A\left(-\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$ et $m = -3.$

Exercice 12.24. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(5\,;4)$ et $B\,(0\,;-2)$.
2. $A\left(-\sqrt{5}\,;-2\sqrt{7}\right)$ et $B\left(2\sqrt{7}\,;\sqrt{5}\right)$.
3. $A\left(\frac{2}{5}\,;-\frac{1}{5}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{3}{2}\right)$.