Chapitre 8

Fonctions affines

8.1 Fonctions affines et linéaires

Définition 8.1. *Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = mx + p,$$

avec $m, p \in \mathbb{R}$.

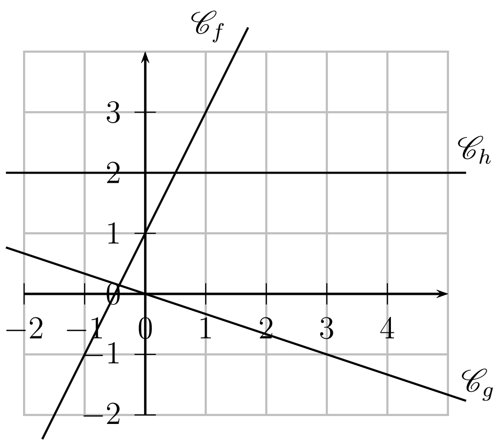
- *Si $m = 0$, alors f est une **fonction constante** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p$.*
- *Si $p = 0$, alors f est une **fonction linéaire** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx$.*

Propriété 8.1. *Dans un repère (O, I, J), la représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.*

Exemples :

Les fonctions affines ci-dessous ont pour représentation les droites ci-contre.

1. $f(x) = 2x + 1$;
2. $g(x) = -\dfrac{1}{3}x$;
3. $h(x) = 2$.



Propriété 8.2. *Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Quelques soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a*

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(3) = -2$ et $f(7) = 3$. Déterminons l'expression de f. On a

$$m = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{3 - (-2)}{4} = \frac{5}{4}.$$

Il reste à déterminer p. Or, comme A appartient à la droite représentative de f, on a $f(3) = -2$ donc

$$\frac{5}{4} \times 3 + p = -2.$$

On en déduit que $p = -\frac{23}{4}$ et donc $f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{23}{4}$.

8.2 Variations et signes d'une fonction affine

8.2.1 Variations d'une fonction affine

Propriété 8.3. *Soit f une fonction affine s'écrivant $f(x) = mx + p$.*

— *Si $m > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.*

— *Si $m < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Exemples :

1. f définie par $f(x) = 3x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Exercice. □

8.2.2 Signes d'une fonction affine

Propriété 8.4. *Soit f une fonction affine telle que $m \neq 0$. Elle admet pour tableau de signe.*

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		*signe de -m*	0	*signe de m*	

Démonstration. Exercice. □

Exemple : $f(x) = -3x + 2$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8.3 Attendus et savoir-faire

— Reconnaître algébriquement et graphiquement des fonctions affines.
— Calculer l'image ou l'antécédent d'un réel par une fonction affine.
— Dessiner une fonction affine ou déterminer sa formule algébrique à partir de son graphe.
— Donner les variations d'une fonction affine.
— Dresser le tableau de signes d'une fonction affine.
— Comparer deux fonctions affines.
— Donner le tableaux de signes d'un produit de fonctions affines.

8.4 Exercices

8.4.1 Démarrage

Exercice 8.1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Le cas échéant, préciser si elles sont constantes, linéaires ou simplement affines.

1. $f_1(x) = 3x + 4$.
2. $f_2(x) = 3x$.
3. $f_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$.
4. $f_4(x) = 4$.

Exercice 8.2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une représentation graphique passant par $P\,(-3\,;4)$?

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = -3x + 4$.
4. $f_4(x) = 4x - 3$.

Exercice 8.3. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine.

1. $f(1) = 3$ et $f(4) = -3$.
2. $f(0) = -2$ et $f(3) = 6$.
3. $f(8) = 1$ et $f(9) = 0$.

Exercice 8.4. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = 4x - 9$.
2. $f_2(x) = -3x - 5$.
3. $f_3(x) = -3x + 4$.
4. $f_4(x) = 4x - 3$.

8.4.2 Approfondissement

Exercice 8.5. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Le cas échéant, préciser si elles sont constantes, linéaires ou simplement affines.

1. $f_1(x) = (-2x + 3) + (2 - 3x)$.
2. $f_2(x) = (-2x + 3)(2 - 3x)$.
3. $f_3(x) = (x - 1)^2 - (x - 1)$.
4. $f_4(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$.

Exercice 8.6. Soit E_p la fonction qui fait augmenter (ou diminuer) la quantité x de $p\%$. Exprimer E_p en fonction de x lorsque :

1. $p = +5\%$.
2. $p = -35\%$.
3. $p = +126\%$.

Quelle est la nature de E_p ?

Exercice 8.7. Dans chacun des cas suivants, exprimer l'aire $A(x)$ de la figure donnée en fonction de x et dire si A est affine.

1. Un carré de côté x.
2. Un rectangle de côtés 5 et x.
3. Un cercle de rayon x.
4. Un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur x et 5.
5. Un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur x et un côté pour longueur 5.

Exercice 8.8. [Démonstration] Soit f une fonction affine : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Montrer que quelques soient x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Exercice 8.9. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(-2x + 1)(6x + 5) > 0$.
2. $(2 - 3x)(4x - 1) \leq 0$.
3. $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

Exercice 8.10. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x + 2}{-x + 6} > 0$.
2. $\dfrac{3x - 4}{2x + 3} \leq 0$.
3. $\dfrac{x - 4}{x + 8} \geq 2$.

Exercice 8.11. [Économie] La ville de Novigrad abrite 6000 habitants et la sorcière Triss Merigold compte y vendre des potions. Grâce à sa magie, elle a pu fabriquer 1000 fioles de potions qu'elle a vendu deux écus à l'unité. Toutefois, elle s'est rendu compte que si elle faisait baisser le prix d'une d'un certain pourcentage x, elle augmenterait ses bénéfices. Le but est d'étudier son chiffre d'affaire afin de déterminer quel pourcentage de réduction donne les meilleurs résultats. Après étude, on sait que l'expression du chiffre d'affaire de Triss Merigold est donné, pour tout $x \in [0\,;100]$, par :

$$C(x) = 2000 + 80x - x^2.$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in [0\,;100]$, $C(x) = (-x + 20)(x - 60) + 3200$.
   (b) Résoudre l'inéquation $C(x) \geq 3200$ et interpréter le résultat.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [0\,;100]$, résoudre $C(x) < 1100$ est équivalent à résoudre $(-x - 10)(x - 90) < 0$.
   (b) En déduire les solutions de l'inéquation $C(x) < 1100$ et interpréter le résultat.
   (c) Résoudre l'inéquation $C(x) > 2000$ et interpréter le résultat.

8.4.3 Entraînement

Exercice 8.12. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Le cas échéant, préciser si elles sont constantes ou affines.

1. $f_1(x) = (-2x+3) - (2-3x)$.
2. $f_2(x) = 3x(-2x+3) - 2x(2-3x)$.
3. $f_3(x) = ((x-1)+(x-1))^2$.
4. $f_4(x) = x(x-1) - (x+1)^2$.

Exercice 8.13. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une représentation graphique passant par $P\,(-3\,;4)$?

1. $f_1(x) = -\dfrac{7}{3}x - 3$.
2. $f_2(x) = 4$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{4}{3}x$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{3}{4}x$.

Exercice 8.14. Dans chaque cas, déterminer l'expression de f fonction affine.

1. $f(-3) = 1$ et $f(0) = 9$.
2. $f(5) = -2$ et $f(7) = 0$.
3. $f(2) = -5$ et $f(-8) = 4$.

Exercice 8.15. Pour chacune des fonctions suivantes, donner ses variations et son tableau de signes. Justifier.

1. $f_1(x) = -\dfrac{7}{3}x - 3$.
2. $f_2(x) = 4$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{4}{3}x$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{3}{4}x$.

Exercice 8.16. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(2x-1)(6x-4) > 0$.
2. $(1-4x)(3x+1) \leq 0$.
3. $5x(9x-3) \geq 0$.

Exercice 8.17. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x+1}{2x+6} > 0$.
2. $\dfrac{3x}{2x-8} \leq 0$.
3. $\dfrac{x-4}{x-7} \geq -1$.