Nom : **Prénom :** **Groupe : 2$^{\text{de}}$ 7**

Évaluation

Probabilités - Fonctions carré et cube

Sujet A 05/04/2022

Compétences : A : /4 ; C : /4 ; D : /4 ; E1 : /4 ; Total : /16

Instructions générales :

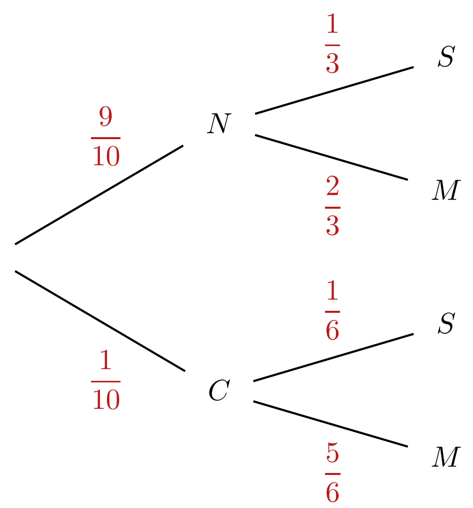
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1.

Lors d'une attaque de zombies, on peut être confronté à deux types de zombies : les zombies normaux et castors zombies. Les castors zombies sont certes moins nombreux (seulement 1 zombie sur 10) mais ils sont aussi plus dangereux : seulement 1 chance sur 6 de survivre sachant que le zombie est un castor alors que c'est 1 chances sur 3 sachant que le zombie est normal.

On note :

— N l'événement « le zombie est normal » ;
— C l'événement « le zombie est un castor zombie » ;
— S l'événement « on survit » ;
— M l'événement « on ne survit pas ».



1. À l'aide des données de l'énoncé, compléter l'arbre ci-dessus.

2. Calculer la probabilité de rencontrer un castor zombie et de survivre.

Rencontrer un castor zombie et survivre est l'événement $C \cap S$, on a

$$\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{60}.$$

Il y a 1 chance sur 60 de rencontrer un castor zombie et de survivre.

3. Calculer la probabilité de survivre.

On a

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C \cap S) + \mathbb{P}(N \cap S) = \frac{1}{60} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{19}{60}.$$

Il y a 19 chances sur 60 de survivre.

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation $(3-2x)^2 = 49$.

Les antécédents de 49 par la fonction carrée étant 7 et -7, on a donc deux possibilités

$$\begin{aligned} 3-2x &= -7 \\ -2x &= -10 \\ x &= 5, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3-2x &= 7 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

On a donc deux solutions : -2 et 5.

2. Résoudre l'équation $\left(\frac{1}{4}x+1\right)^3 = -8$.

L'antécédent de -8 par la fonction cube étant -2 on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x+1 &= -2 \\ \frac{1}{4}x &= -3 \\ x &= -12. \end{aligned}$$

On a donc pour solution -12.

Exercice 3. Déterminer un encadrement de $8-3x^2$ pour $-3 \leq x \leq 1$.

On a

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq x^2 \leq 9 \\ 0 &\geq -3x^2 \geq -27 \\ 8 &\geq 8-3x^2 \geq -19. \end{aligned}$$

Exercice 4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^3 + 5$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq x_2 \\
x_1^3 &\leq x_2^3 \quad \text{car la fonction cube est croissante sur } \mathbb{R} \\
-\frac{3}{2}x_1^3 &\geq -\frac{3}{2}x_2^3 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\
-\frac{3}{2}x_1^3 + 5 &\geq -\frac{3}{2}x_2^3 + 5 \\
f(x_1) &\geq f(x_2).
\end{aligned}$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2} - (5-2x)^2$ est croissante sur $\left]-\infty\,; \dfrac{5}{2}\right]$.

Soient $x_1, x_2 \in \left]-\infty\,; \dfrac{5}{2}\right]$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq x_2 \leq \frac{5}{2} \\
-2x_1 &\geq -2x_2 \geq -5 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\
5 - 2x_1 &\geq 5 - 2x_2 \geq 0 \\
(5-2x_1)^2 &\geq (5-2x_2)^2 \quad \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
-(5-2x_1)^2 &\leq -(5-2x_2)^2 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\
\frac{1}{2} - (5-2x_1)^2 &\leq \frac{1}{2} - (5-2x_2)^2 \\
g(x_1) &\leq g(x_2).
\end{aligned}$$

Donc g est croissante sur $\left]-\infty\,; \dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice 6.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2$ et $g(x) = 8x$. Étudier les positions relatives des courbes de f et g : $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Pour étudier les positions relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on va étudier le signe de $f - g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - g(x) = -2x^2 - 8x = -2x(x+4).$$

$-2x = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $x + 4 = 0$ si et seulement si $x = -4$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f-g$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f - g$ est positive sur $[-4\,;0]$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur cet intervalle ; $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;-4] \cup [0\,;+\infty[$.