**Nom :** **Prénom :** **Groupe : 2$^{\text{de}}$ 7**

# Évaluation

*Probabilités - Fonctions carré et cube*

Sujet B 05/04/2022

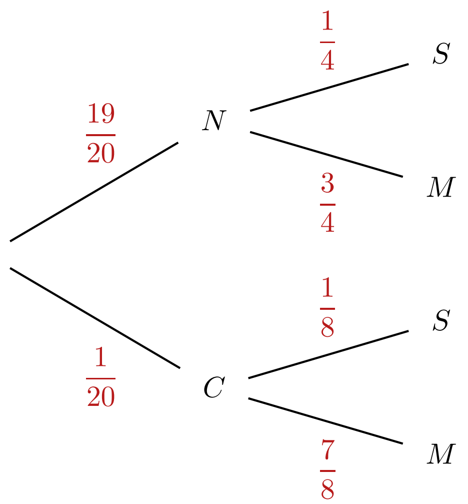
**Compétences :** A : /4 ; C : /4 ; D : /4 ; E1 : /4 ; Total : /16

**Instructions générales :**
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

**Exercice 1.**

Lors d'une attaque de zombies, on peut être confronté à deux types de zombies : les zombies normaux et castors zombies. Les castors zombies sont certes moins nombreux (seulement 1 zombie sur 20) mais ils sont aussi plus dangereux : seulement 1 chance sur 8 de survivre sachant que le zombie est un castor alors que c'est 1 chances sur 4 sachant que le zombie est normal.

On note :
- $N$ l'événement « le zombie est normal » ;
- $C$ l'événement « le zombie est un castor zombie » ;
- $S$ l'événement « on survit » ;
- $M$ l'événement « on ne survit pas ».




**1.** À l'aide des données de l'énoncé, compléter l'arbre ci-dessus.

**2.** Calculer la probabilité de rencontrer un castor zombie et de survivre.

Rencontrer un castor zombie et survivre est l'événement $C \cap S$, on a

$$\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{160}.$$

Il y a 1 chance sur 160 de rencontrer un castor zombie et de survivre.

**3.** Calculer la probabilité de survivre.

On a

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C \cap S) + \mathbb{P}(N \cap S) = \frac{1}{160} + \frac{19}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{39}{160}.$$

Il y a 39 chances sur 160 de survivre.

**Exercice 2.**

**1.** Résoudre l'équation $(2-7x)^2 = 25$.

Les antécédents de 25 par la fonction carrée étant 5 et $-5$, on a donc deux possibilités

$$\begin{aligned} 2-7x &= -5 \\ -7x &= -7 \\ x &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-7x &= 5 \\ -7x &= 3 \\ x &= -\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

On a donc deux solutions : $-\frac{3}{7}$ et 1.

**2.** Résoudre l'équation $\left(\frac{1}{5}x+3\right)^3 = -27$.

L'antécédent de $-27$ par la fonction cube étant $-3$ on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x+3 &= -3 \\ \frac{1}{5}x &= -6 \\ x &= -30. \end{aligned}$$

On a donc pour solution $-30$.

**Exercice 3.** Déterminer un encadrement de $6-7x^2$ pour $-2 \leq x \leq 4$.

On a

$$\begin{aligned} -2 &\leq x \leq 4 \\ 0 &\leq x^2 \leq 16 \\ 0 &\geq -7x^2 \geq -112 \\ 8 &\geq 6-7x^2 \geq -106. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 + 10$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 \\ x_1^3 &\leq x_2^3 \quad \text{car la fonction cube est croissante sur } \mathbb{R} \\ -\frac{4}{3}x_1^3 &\geq -\frac{4}{3}x_2^3 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\ -\frac{4}{3}x_1^3 + 10 &\geq -\frac{4}{3}x_2^3 + 10 \\ f(x_1) &\geq f(x_2). \end{aligned}$$

Donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{4} - (2-3x)^2$ est décroissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Soient $x_1$, $x_2 \in \left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \leq x_1 &\leq x_2 \\ -2 \geq -3x_1 &\geq -3x_2 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\ 0 \geq 2 - 3x_1 &\geq 2 - 3x_2 \\ (2-3x_1)^2 &\leq (2-3x_2)^2 \quad \text{car la fonction carré est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\ -(2-3x_1)^2 &\geq -(2-3x_2)^2 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\ \frac{1}{4} - (2-3x_1)^2 &\geq \frac{1}{4} - (2-3x_2)^2 \\ g(x_1) &\geq g(x_2). \end{aligned}$$

Donc $g$ est décroissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

**Exercice 6.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2$ et $g(x) = -3x$. Étudier les positions relatives des courbes de $f$ et $g$ : $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Pour étudier les positions relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on va étudier le signe de $f - g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - g(x) = 6x^2 - (-3x) = 6x^2 + 3x = 3x(2x+1).$$

$3x = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $2x + 1 = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f-g$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f - g$ est positive sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right] \cup [0\,;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur cet intervalle ; $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$.