**Nom :** **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

# Évaluation

*Exponentielle*

Sujet A 22/04/2022

**Note et remarques :** /18

**Instructions générales :**

- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

**Exercice 1.** ( /3)

**1.** Réduire $\dfrac{e^{2-n}}{(\mathrm{e}^{n+1})^3}$.

On a

$$\frac{e^{2-n}}{(\mathrm{e}^{n+1})^3} = \mathrm{e}^{2-n-3(n+1)} = \mathrm{e}^{-4n-1}.$$

**2.** Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} = 1 + e^{-x}$.

On a

$$\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1 + e^{-x}.$$

**Exercice 2.** ( /5)

**1.** Résoudre l'inéquation suivante $(\mathrm{e}^{-x^2}-1)(1+\mathrm{e}^{2x+1})<0$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{2x+1}>0$, il faut donc résoudre $\mathrm{e}^{-x^2}-1<0$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x^2}-1<0 &\iff \mathrm{e}^{-x^2}<1\\ &\iff \mathrm{e}^{-x^2}<e^0\\ &\iff -x^2<0\\ &\iff x^2>0.\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\mathbb{R}^*$.

**2.** Résoudre l'équation suivante $\mathrm{e}^{x+6}=\mathrm{e}^{-\frac{9}{x}}$.

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x+6}=\mathrm{e}^{-\frac{9}{x}} &\iff x+6=-\frac{9}{x}\\ &\iff x+6+\frac{9}{x}=0\\ &\iff \frac{x^2+6x+9}{x}=0\\ &\iff \frac{(x+3)^2}{x}=0.\end{aligned}$$

D'après la règle du quotient nul, on a $(x+3)^2=0$ et donc $x=-3$.

**Exercice 3.** ( /4)

On considère la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.** On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les variations de $f$.

$f$ est de la forme $\mathrm{e}^u$ donc $f'$ de la forme $u'\mathrm{e}^u$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

L'exponentielle étant positive, $f'(x)$ a le même signe que $-2x$. On a donc

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**2.** En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-elle minorée, majorée, bornée ?

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes variations que $f$ sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc décroissante. On en déduit qu'elle est majorée par son premier terme : $u_0 = 1$. Enfin, étant une exponentielle, $u_n$ est positif pour tout $n$ et donc minoré par 0. Majorée et minorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

**Exercice 4.** (      /6)

Donner les domaines de définitions et dérivations puis étudier les variations de la fonctions $f$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+x+1}$. En déduire ses éventuels extrema.

$f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour étudier les variations de $f$, nous allons les dériver. $f$ étant de la forme $uv$, on a $(uv)' = u'v + v'u$ avec $v = \mathrm{e}^w$ et donc $v' = (e^w)' = w'\mathrm{e}^w$ On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x+1} + x(-2x+1)\mathrm{e}^{-x^2+x+1} = (-2x^2+x+1)\mathrm{e}^{-x^2+x+1}.$$

L'exponentielle étant positive, le signe de $f'$ est celui du polynôme $-2x^2+x+1$. Pour l'étudier, on calcule son discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9.$$

Le discriminant étant positif, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{-4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Comme $a < 0$ et $f'$ est du signe du polynôme, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}}{2}$ | ↗ | $\mathrm{e}$ | ↘ | $0$ |

$f$ admet donc pour minimum $-\frac{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}}{2}$ atteint en $-\dfrac{1}{2}$ et e pour maximum atteint en 1.