Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Exponentielle

Sujet B 22/04/2022

Note et remarques : $/18$

Instructions générales :

- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/3)

1. Réduire $\dfrac{e^{n+5}}{(\mathrm{e}^{3-n})^2}$.

On a

$$\frac{e^{n+5}}{(\mathrm{e}^{3-n})^2} = \mathrm{e}^{n+5-2(3-n)} = \mathrm{e}^{3n-1}.$$

2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

On a

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x)^2 - 1} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 1)} = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Exercice 2. (/5)

1. Résoudre l'inéquation suivante $(\mathrm{e}^{2x+1}-1)(1+\mathrm{e}^{-x^2})<0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{-x^2}>0$, il faut donc résoudre $\mathrm{e}^{2x+1}-1<0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x+1}-1<0 &\iff \mathrm{e}^{2x+1}<1\\
&\iff \mathrm{e}^{2x+1}<e^{0}\\
&\iff 2x+1<0\\
&\iff x<-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$.

2. Résoudre l'équation suivante $\mathrm{e}^{x-2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x-2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &\iff x-2=-\frac{1}{x}\\
&\iff x-2+\frac{1}{x}=0\\
&\iff \frac{x^2-2x+1}{x}=0\\
&\iff \frac{(x-1)^2}{x}=0.
\end{aligned}$$

D'après la règle du quotient nul, on a $(x-1)^2=0$ et donc $x=1$.

Exercice 3. (/4)

On considère la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les variations de f.

f est de la forme e^u donc f' de la forme $u'\mathrm{e}^u$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

L'exponentielle étant positive, $f'(x)$ a le même signe que $-2x$. On a donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-elle minorée, majorée, bornée ?

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes variations que f sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc décroissante. On en déduit qu'elle est majorée par son premier terme : $u_0 = 1$. Enfin, étant une exponentielle, u_n est positif pour tout n et donc minoré par 0. Majorée et minorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Exercice 4. (/6)

Donner les domaines de définitions et dérivations puis étudier les variations de la fonctions f par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-3x+1}$. En déduire ses éventuels extrema.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour étudier les variations de f, nous allons les dériver. f étant de la forme uv, on a $(uv)' = u'v + v'u$ avec $v = \mathrm{e}^w$ et donc $v' = (e^w)' = w'\mathrm{e}^w$ On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x+1} + x(2x-3)\mathrm{e}^{x^2-3x+1} = (2x^2-3x+1)\mathrm{e}^{x^2-3x+1}.$$

L'exponentielle étant positive, le signe de f' est celui du polynôme $2x^2-3x+1$. Pour l'étudier, on calcule son discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1.$$

Le discriminant étant positif, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 1.$$

Comme $a > 0$ et f' est du signe du polynôme, on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

f admet donc pour minimum local e^{-1} atteint en 1 et e pour maximum atteint en 1.