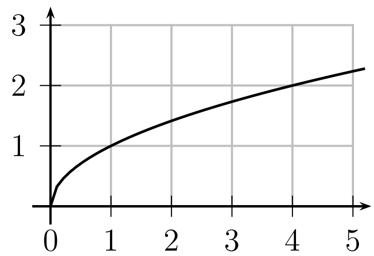
Chapitre 14

Fonctions racine et inverse

14.1 Fonction racine carrée

Définition 14.1. *La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $f(x)=\sqrt{x}$ est appelée* ***fonction racine carrée****.*

Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique la courbe ci-contre.



Propriété 14.1.

1. *La fonction racine carrée est positive sur $[0\,;+\infty[$.*
2. *La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.*

Démonstration. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a<b$. On veut montrer que $f(a)<f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b)-f(a)$. On a – puisque $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ est non nul –,

$$f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Comme $\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$ et $b-a>0$, on en déduit que $f(b)-f(a)>0$, donc que $f(a)<f(b)$. Autrement dit, f est croissante. □

Propriété 14.2. *Soient x, $y\in\mathbb{R}_+$, on a :*

1. *$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$;*
2. *$\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$.*

Démonstration. Soient x, $y\in\mathbb{R}_+$.

1. On a $\sqrt{xy}^2=xy$. Or x, $y\in\mathbb{R}_+$, donc $x=\sqrt{x}^2$ et $y=\sqrt{y}^2$, donc

$$\sqrt{xy}^2=xy=\sqrt{x}^2\sqrt{y}^2=(\sqrt{x}\sqrt{y})^2.$$

Comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{xy}\in\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

2. On a $\sqrt{x+y}^2 = x+y$ et

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y.$$

Or $x+y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$ car $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$, donc

$$\sqrt{x+y}^2 \leq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

Comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x+y} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

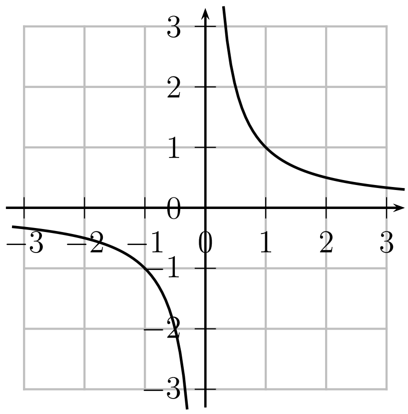
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

□

14.2 Fonction inverse

Définition 14.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est appelée **fonction inverse**.*

Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique l'**hyperbole** ci-contre.



Propriété 14.3.

1. La fonction inverse est négative sur $]-\infty\,;0[$ et positive sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Remarque : la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, en effet on a $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.

Démonstration. Soient a et b dans $]0\,;+\infty[$ tels que $a < b$ (le cas $]-\infty\,;0[$ est laissé en exercice. On veut montrer que $f(a) > f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$. On a,

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Comme $ab > 0$ et $a - b < 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) < 0$, donc que $f(a) > f(b)$. Autrement dit, f est décroissante. $\square$

14.3 Attendus et savoir-faire

— Connaître et utiliser les propriétés des fonctions racine et inverse.
— Comparer les fonctions racine et inverse à d'autres fonctions.

14.4 Exercices

14.4.1 Démarrage

Exercice 14.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 9 par la fonction racine carré est 3.
2. L'image de -9 par la fonction racine carré est -3.
3. Un antécédent de 4 par la fonction racine carré est 16.
4. Un antécédent de 5 par la fonction racine carré est -25.

Exercice 14.2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} = 5$.
2. $\sqrt{x} = -2$.
3. $3\sqrt{x} = 9$.
4. $\sqrt{x} \leq 11$.
5. $\sqrt{x} < -1$.
6. $\sqrt{x} \geq 12$.

Exercice 14.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $9 < x \leq 36$, déterminer un encadrement de

1. $\sqrt{x}$.
2. $\sqrt{x} + 3$.
3. $5\sqrt{x} - 1$.

Exercice 14.4.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x} - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -5\sqrt{x}+1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14.5. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.
2. $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$.
3. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Exercice 14.6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction inverse est $-\dfrac{1}{3}$.
2. L'image de $-\dfrac{1}{4}$ par la fonction inverse est -4.
3. Un antécédent de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction inverse est 2.
4. Un antécédent de $-\dfrac{6}{5}$ par la fonction inverse est $-\dfrac{5}{6}$.

Exercice 14.7. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$.
2. $\dfrac{1}{x} = -5$.
3. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{17}$.
4. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{5}$.
5. $\dfrac{1}{x} < -1$.
6. $\dfrac{1}{x} \geq 0$.

Exercice 14.8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{1}{x}$.
2. $\dfrac{1}{x} + 3$.
3. $-\dfrac{5}{x} - 1$.

Exercice 14.9.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 14.10. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$.
3. $f(x) = \dfrac{7x}{1-4x}$.

14.4.2 Approfondissement

Exercice 14.11. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction inverse est décroissante sur $]9\,;+\infty]$.
2. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
3. La fonction inverse est décroissante sur $]-9\,;0[\cup]0\,;9[$.

Exercice 14.12. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{3x-2} = 5$.
2. $\sqrt{-4x+1} = 0$.
3. $\sqrt{x} > 6$.
4. $\sqrt{x} > 0$.
5. $4 \leq \sqrt{x} \leq 6$.
6. $8 < \sqrt{x} + 1 \leq 12$.

Exercice 14.13.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $]-\infty\,;1]$ par $g(x) = 4\sqrt{1-x^3}$ est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.

Exercice 14.14. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{-x}$.
2. $f(x) = \sqrt{(5x+1)(2-7x)}$.
3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{8x-9}}$.

Exercice 14.15. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x+3} = 8$.
2. $-\dfrac{1}{2x+1} = 7$.
3. $\dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$.
4. $2 < \dfrac{1}{x} \leq 4$.
5. $-2 \leq \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$.
6. $\dfrac{5}{6} < \dfrac{2}{x+2} \leq \dfrac{6}{5}$.

Exercice 14.16.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3+1}$ est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissantes sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 14.17. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+2}}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 14.18. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 6\sqrt{x}$ et $g(x) = -2\sqrt{x}+3$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.19. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.20. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{2}{t}$ et $g(t) = -\dfrac{3}{t} - 5$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.21. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.22. [Démonstration] Montrer que le fonction inverse est impaire.

Exercice 14.23. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Exercice 14.24. [Évolutions] On considère un disque de rayon r et de surface S.

1. Exprimer r en fonction de S.
2. On considère un disque de surface $S_1 = 1$. Comment doit évoluer le rayon du disque pour que son aire triple ?
3. Même question pour une diminution de moitié de l'aire du disque.

14.4.3 Entraînement

Exercice 14.25. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $3\sqrt{x} - 2 = 25$.
2. $-\sqrt{x} + 4 = 0$.
3. $4\sqrt{x} < 16$.
4. $-3\sqrt{x} < -27$.
5. $5 \leq \sqrt{x} \leq 11$.
6. $9 < \sqrt{x} + 5 \leq 13$.

Exercice 14.26. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $6 \leq x < 7$, déterminer un encadrement de

1. $\sqrt{x} - 4$.
2. $-2\sqrt{x} + 4$.
3. $1 + \sqrt{x^2 + 5}$.

Exercice 14.27. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} - 5 = -8$.
2. $\dfrac{1}{x - 5} = 2$.
3. $\dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{3}{5}$.
4. $-4 < \dfrac{1}{x}$.
5. $-3 \leq \dfrac{1}{x} < -1$.
6. $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{1}{x} < 4$.

Exercice 14.28. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-5 < x \leq -\dfrac{1}{5}$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{1}{x} - 1$.
2. $-\dfrac{5}{x} + 2$.
3. $1 - \dfrac{2}{x^3 + 1}$.

Exercice 14.29.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = -4\sqrt{x} + 3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = 1 - \sqrt{-4x^3}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Montrer que la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est croissante sur $[-1\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;1]$.
4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 14.30. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{2 - x}$.
2. $f(x) = \sqrt{(6x - 3)(15 + 3x)}$.
3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x + 9}{7 + 2x}}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 8}$.
6. $f(x) = \dfrac{4x + 1}{(6x - 7)(9x + 18)}$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x + 5)}}$.