Chapitre 15

Intersections de droites

15.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

15.1.1 Définition

Définition 15.1.

— *On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues** tout ensemble d'équations de la forme*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

où a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$.

— *Le couple $(x\,;y)$ est **solution du système** si et seulement si il est solution de chacune des équations qui le composent.*

— ***Résoudre** un système signifie trouver ses solutions.*

Remarque : Les équations d'un tel système sont en fait des équations de droites.

Exemples :

1. $$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$$
   est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

2. $$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$$
   n'est pas un système de deux équations linéaires car il contient un x^2.

Exemples :

— Le couple $(1\,;1)$ est solution du système ci-dessus car

$$\begin{cases} 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1, \\ 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

— Le couple $(2\,;0)$ n'est pas solution du système même s'il vérifie l'une de ses deux équations car il ne vérifie pas l'autre :

$$\begin{cases} 3\times 2-2\times 0=6\neq 1, \\ 2+0=2. \end{cases}$$

15.1.2 Résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété 15.1. *Un système de deux équations linéaires à deux inconnues admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.*

Exemple de résolution d'un système linéaire : Reprenons le système ci-dessus et donnons un nom à ses lignes :

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \quad (L_1) \\ x+y=2. \quad (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver ses éventuelles solutions, on laisse une ligne intacte – par exemple (L_1) – et remplace l'autre par une combinaison linéaire des deux lignes afin d'éliminer une inconnue – dans ce cas, on va éliminer x en remplaçant (L_2) par (L_1-3L_2) :

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \quad (L_1) \\ 3x-2y-3(x+y)=1-3\times 2. \quad (L_2\leftarrow L_1-3L_2) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \quad (L_1) \\ -5y=-5. \quad (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_2) est maintenant une équation à une inconnue, sa solution est $y=1$. On remplace alors y par 1 dans (L_1) :

$$\begin{cases} 3x-2=1, \quad (L_1) \\ y=1. \quad (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_1) est à son tour devenu une inconnue, sa solution est -1. Le couple solution est donc $(1\,;1)$.

Remarques :

— Cette méthode est dite « d'élimination » car elle consiste à éliminer une variable pour se ramener à des équations à une inconnue.

— Un système a une infinité de solutions lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0=0$ ».

— Un système n'a pas de solution lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0=1$ ».

15.2 Parallélisme

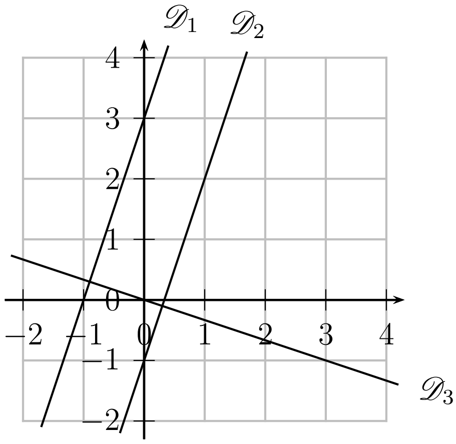
Propriété 15.2. *Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Il existe A et B deux points de $\mathscr{D}_1$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{d_1}$. De même, il existe C et D deux points de $\mathscr{D}_2$ tels que $\overrightarrow{CD} = \vec{d_2}$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{d_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{d_2} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. □

Propriété 15.3. *Soient deux droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$.*

Exemples :

— $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 3x+3$ et $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 3x - 1$ sont parallèles.
— $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 3x+3$ et $\mathscr{D}_3$ d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x$ ne sont pas parallèles.



Démonstration. Soient $A\,(0\,;y_A)$ et $B\,(1\,;y_B)$ deux points de $\mathscr{D}_1$. Par définition, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ où m_1 est le coefficient directeur de $\mathscr{D}_1$. De même, en considérant $C\,(0\,;y_C)$ et $D\,(1\,;y_D)$ deux points de $\mathscr{D}_2$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ (où m_2 est le coefficient directeur de $\mathscr{D}_2$) est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$.

D'après la propriété 15.2, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times m_2 - m_1 \times 1 = 0,$$

ou encore $m_1 = m_2$. □

Corollaire 15.1. *Soient A, B et C trois points du plan. Ces trois points sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.*

15.3 Intersection

Propriété 15.4. *Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes si et seulement si $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas colinéaires.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la propriété 15.3. □

Propriété 15.5. *Soient deux droites du plan* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *d'équations respectives* $a_1x+b_1y+c_1=0$ *et* $a_2x+b_2y+c_2=0$. *Si les droites* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *sont sécantes, alors leur point d'intersection* I *est l'unique solution du système*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1, \\ a_2x+b_2y=-c_2. \end{cases}$$

Démonstration. Soient deux droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$. Si elles sont sécantes, alors elles admettent un unique point d'intersection I qui est solution des deux équations de droites et donc du système ci-dessus. ☐

Exemple : Soient les droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $3x-2y-1=0$ et $x+y-2=0$. Leurs vecteurs directeurs sont $\vec{d_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a

$$2\times(-1)-3\times 2=-8\neq 0,$$

donc $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et leur point d'intersection est l'unique solution du système

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \\ x+y=2. \end{cases}$$

On a déjà vu que la solution de ce système est $(1\,;1)$ donc le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $I\,(1\,;1)$.

15.4 Attendus et savoir-faire :

- Déterminer si un système est un système d'équations linéaires à deux inconnues ou non.
- Déterminer si un couple est solution ou non d'un système d'équations.
- Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues.
- Déterminer si des droites sont parallèles ou sécantes.
- Sachant que deux droites parallèles et connaissant un vecteur directeur ou le coefficient directeur de l'une, déterminer celui de l'autre.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

15.5 Exercices

15.5.1 Démarrage

Exercice 15.1. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-2\,;1)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ x+2y=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -2x+4y=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+y=-5, \\ -5x+7y=4. \end{cases}$

Exercice 15.2. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = -6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x + 5y = 0, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 6y = 8, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$

Exercice 15.3. Dans chaque cas, déterminer si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes. Dans ce dernier cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

1. $\mathscr{D}_1 :\ 6x - y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ -4x + \dfrac{2}{3}y + 5 = 0$.
2. $\mathscr{D}_1 :\ 3x + 2y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ x + \dfrac{1}{3}y + 4 = 0$.
3. $\mathscr{D}_1 :\ 4x - 3y + 12 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 7$.
4. $\mathscr{D}_1 :\ y = 2x - 1$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 3x + 4$.
5. $\mathscr{D}_1 :\ y = 3x - 4$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 4x + 5$.
6. $\mathscr{D}_1 :\ y = -6x - 7$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 1$.

15.5.2 Approfondissement

Exercice 15.4. On considère le système (S) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2x^2 - y^2 = -1. \end{cases}$

1. On pose $X = x^2$ et $Y = y^2$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Exercice 15.5. On considère le système (S) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 4, \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{5}{y} = 1. \end{cases}$

1. On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Exercice 15.6. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} y = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x + 2y = -6, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$

Exercice 15.7. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions.

1. $\begin{cases} kx + 3y = 5, \\ 2x + ky = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - ky = 6, \\ kx + 25y = 10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} kx + y = 6, \\ kx - 2y = -1. \end{cases}$

Exercice 15.8. [Magie] Triss et Yennefer ont acheté des items magiques afin de préparer quelques élixirs. Triss a acheté 80 cristaux d'Albar et 50 plumes de Cocatrix pour 75 Orins ; Yennefer a acheté 30 cristaux d'Albar et 60 plumes de Cocatrix pour 57 Orins. Déterminer le coût d'un cristal d'Albar et d'une plume de Cocatrix.

Exercice 15.9. [Algorithme] On souhaite écrire un algorithme permettant de déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites d'équations $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$.

1. À quelles conditions les deux droites sont-elles sécantes, parallèles, confondues ?
2. Exprimer x en fonction m_1, m_2, p_1 et p_2 dans le cas où les deux droites sont sécantes.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 1 : Intersection de droites

Données : m_1, m_2, p_1, p_2

Début
- **Si** .... **Alors**
  - **Sorties :** ....
- **Sinon Si** .... **Alors**
  - **Sorties :** ....
- **Sinon Si** .... **Alors**
  - $x \leftarrow$ ....
  - $y \leftarrow$ ....
  - **Sorties :** ....

Fin

Exercice 15.10. [Algorithme,*]** Écrire un algorithme permettant de déterminer si les droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2 + c_2 = 0$ sont parallèles, confondues ou sécantes et le cas échéant leur unique point d'intersection.

Exercice 15.11. [**] On souhaite déterminer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en B dont l'hypoténuse mesure 4 et l'aire vaut $3,84$. On pose $AB = x$ et $BC = y$.

1. Faire un dessin de la situation.
2. Exprimer l'aire de ABC en fonction de x et y. En déduire que $xy = 7,68$.
3. Écrire l'égalité de Pythagore dans ce triangle à l'aide de x et y.
4. Montrer que $(x + y)^2 = 31,36$ et $(x - y)^2 = 0,64$.
5. En déduire un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et le résoudre.

Exercice 15.12. [*] Soit $k \in \mathbb{R}$. On nomme d_k la droite d'équation $kx + (1 - 2k) + k - 3 = 0$.

1. Écrire une équation de d_1 et la tracer.
2. Tracer dans le même repère d_{-1} et d_2.
3. Déterminer la valeur de k pour laquelle :
   (a) la droite d_k est parallèle à l'axe (Ox) puis la tracer ;
   (b) la droite d_k est parallèle à l'axe (Oy) puis la tracer ;
   (c) la droite d_k passe par l'origine du repère puis la tracer.
4. Les droites tracées semblent concourantes en un point P. Montrer que quelque soit k, d_k passe par P.
5. Existe-t-il des droites d_k :
   (a) passant par $M\,(10\,;6)$?
   (b) de vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

15.5.3 Entraînement

Exercice 15.13. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-1\,;2)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

Exercice 15.14. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ -2x + y = -5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3x + 5y = -5, \\ 21x - 35y = 4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10x - 12y = 9, \\ x + 2y = -8. \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2x + 5y = 7, \\ 16x - 40y = -56. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$

Exercice 15.15. Dans chaque cas, déterminer si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes. Dans ce dernier cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

1. $\mathscr{D}_1 :\ 5x + 2y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ -4x + \dfrac{2}{5}y + 3 = 0$.
2. $\mathscr{D}_1 :\ 2x - 3y + 1 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y + 4 = 0$.
3. $\mathscr{D}_1 :\ x + 2y - 4 = 0$ et $\mathscr{D}_2 :\ 2x + y - 1 = 0$.
4. $\mathscr{D}_1 :\ y = 2x - 1$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 2x + 6$.
5. $\mathscr{D}_1 :\ y = -3x - 4$ et $\mathscr{D}_2 :\ y = 4x - 7$.
6. $\mathscr{D}_1 :\ y = 8x - 6$ et $\mathscr{D}_2 :\ x = 3$.

Exercice 15.16. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} x = -4, \\ -x + y = 5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 3y = -9, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$

Exercice 15.17. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions

1. $\begin{cases} 9x - ky = 7, \\ -kx + 4y = 5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} kx - y = 2, \\ 36x + ky = 6. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + ky = -1, \\ 5x - 2ky = 0. \end{cases}$