Chapitre 2

Calcul littéral

2.1 Fractions

Propriété 2.1. ***[Multiplication]*** *Pour tous a, b, c et d réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, \quad \frac{a \times c}{a \times d} = \frac{c}{d}, \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}.$$

Exemples :

1. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.
2. $\frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$.
3. $x \times \frac{4}{7} = \frac{4x}{7}$.

Propriété 2.2. ***[Addition et soustraction]*** *Pour tous a, b et c réels avec $c \neq 0$, on a*

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Remarque : pour additionner ou soustraire plusieurs fractions, il faut que celles-ci soient au même dénominateur.

Exemples :

1. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6}$.
3. $x + \frac{x}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{2x+x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}x$.

★ Vidéo.

Propriété 2.3. ***[Division]*** *Pour tous a, b, c et d réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a*

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Exemple : $\dfrac{2/3}{5/6} = \dfrac{2 \times 6}{3 \times 5} = \dfrac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \dfrac{4}{5}$.

2.2 Puissances et racine carrée

Propriété 2.4. *Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$, m, $n \in \mathbb{N}$. On a*

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$;
2. *si* $a \neq 0$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(ab)^n = a^n \times b^n$;
5. *si* $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Exemples :

1. $2^3 \times 2^4 = 2^7$;
2. $\dfrac{3^4}{3^3} = 3$;
3. $(c^2)^{10} = c^{20}$;
4. $(4x)^2 = 16x^2$.

Propriété 2.5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. On a* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

2.3 Identités remarquables

Propriété 2.6. *Pour tous nombres réels a et b, on a :*

Forme développée (somme)	=	*Forme factorisée (produit)*
$a^2 + 2ab + b^2$	=	$(a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	=	$(a-b)^2$
$a^2 - b^2$	=	$(a+b)(a-b)$

Démonstration. Exercice. □

Exemples :

1. $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$.
2. $(2z-1)^2 = 4z^2 - 4z + 1$.
3. $y^2 - 25 = (y-5)(y+5)$.
4. $(w+2t)(w-2t) = w^2 - 4t^2$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2 ; vidéo (développer) ; vidéo (factoriser).

2.4 Équations et inéquations

2.4.1 Équations et inéquations

Définition 2.1.

1. *Une* ***équation****, resp.* ***inéquation****, est une égalité, resp. inégalité, entre deux expressions algébriques dépendant d'une même variable, généralement notée x (mais pas nécessairement).*
2. *Une* ***solution d'une équation****, resp.* ***inéquation****, est une valeur de l'inconnue x pour laquelle l'égalité, resp. l'inégalité, est vraie.*
3. ***Résoudre une équation ou inéquation****, c'est trouver* ***l'ensemble de ses solutions*** *(c'est à dire toutes ses solutions).*
4. *Deux équations ou inéquations sont* ***équivalentes*** *si elles ont le même ensemble de solutions. L'équivalence est symbolisé par $\Longleftrightarrow$.*

Exemple :

— $x^2 + 4 = 4x$ est une équation dont 2 est solution car $2^2 + 4 = 4 \times 2$. Nous n'avons pas pour autant résolu cette équation car nous ne savons pas *a priori* si elle admet d'autres solutions.

— $x + 4 \geq 1$ est inéquation dont 0 est solution car $0 + 4 = 4 \geq 1$. De même, 2 est aussi une solution car $2 + 4 = 6 \leq 1$. Il existe en fait une infinité de solution.

Propriété 2.7.

1. *Si l'on additionne ou l'on soustrait le même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.*
2. *Si l'on multiplie ou divise par un même nombre différent de 0 les deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.*
3. *Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un nombre négatif les deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente dont le sens de l'inégalité est changé.*

Exemple :

1. Résolvons l'équation $2x + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} & 2x + 1 = 0 & \\ \Longleftrightarrow\ & 2x = -1 & \text{On a ajouté -1 de chaque côté de l'égalité.} \\ \Longleftrightarrow\ & x = -\frac{1}{2} & \text{On a divisé par 2 de chaque côté.} \end{aligned}$$

L'équation admet pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.

2. Résolvons l'inéquation $-2x+2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} & -2x+2 \geq 0 \\ \iff & -2x \geq -2 \\ \iff & x \leq \frac{-2}{-2} \quad \text{On divise par -2 de chaque côté : le sens change.} \\ \iff & x \leq 1. \end{aligned}$$

L'inéquation admet pour solution tous les nombres inférieurs ou égaux à 1, i.e. l'intervalle $]-\infty\,;1]$.

★ Vidéo inéquations.

2.4.2 Équations produit et quotient

Propriété 2.8.

1. *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un d'entre eux, au moins, est nul.*
2. *Une fraction est nulle si et seulement si le numérateur est nul.*

Remarque : le dénominateur d'une fraction est nécessairement non nul.

Exemples :

1. Résolvons $(x+3)(x-7)=0$. D'après la règle du produit nul, soit $x+3=0$, soit $x-7=0$, donc $x=-3$ ou $x=7$.
2. Résolvons $\dfrac{2x+5}{x^2+1}=0$. D'après la règle du quotient nul, le numérateur est nul : $2x+5=0$, d'où $2x=-5$ et donc $x=-\dfrac{5}{2}$.

★ Vidéo produit 1 ; vidéo produit 2 ; vidéo quotient 1 ; vidéo quotient 2.

2.5 Attendus et savoir-faire

— Connaître et utiliser les règles de calculs sur les puissances et les fractions.

— Savoir développer, factoriser, réduire une expression.

— Connaître les identités remarquables et savoir les utiliser dans les deux sens.

— Savoir résoudre une équation simple, produit ou quotient.

— Savoir résoudre une inéquation.

2.6 Exercices

2.6.1 Démarrage

Exercice 2.1. Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}$;
2. $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$;
3. $3+\dfrac{3}{2}$;
4. $\dfrac{z}{3}-\dfrac{2}{3}$;
5. $\dfrac{a}{40}\times\dfrac{2a}{3}$;
6. $\dfrac{z}{3}-\dfrac{2z}{5}$;
7. $\dfrac{2/3}{4/3}$;
8. $\dfrac{6/5}{3/20}$;
9. $\dfrac{21/4}{7/8}$;
10. $\dfrac{25/16}{10/32}$;
11. $\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}$;
12. $\dfrac{\frac{1}{5}+2}{\frac{1}{5}-2}\times\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$.

Exercice 2.2. Simplifier les expressions suivantes :

1. $2^3\times 2^5$;
2. $\dfrac{13^2}{13^7}$;
3. $4^5\times 8^9$;
4. $\dfrac{(4a)^3}{2a^9}$;
5. $(9r)^3\times(2r)^2$;
6. $\dfrac{n^6\times m^7}{n^2\times m^3}$;
7. $\dfrac{\frac{n^2}{m^5}\times n^3}{\frac{n^9}{m^8}\times m^5}$.

Exercice 2.3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les racines carrées suivantes avec a et b les plus petits possibles.

1. $\sqrt{27}$;
2. $\sqrt{32}$;
3. $\sqrt{50}$;
4. $\sqrt{64}$.

Exercice 2.4. Simplifier les expressions suivantes :

1. $2x-3+x+9$;
2. $x-5-3x$;
3. $y-(5+y)$;
4. x^2-x+6x^2+3x-9 ;
5. $3-2a+8a^2-(a-1)$;
6. $3b+5b^2-(2b+1)$.

Exercice 2.5. Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $3(2+x)$;
2. $a(3-a)$;
3. $-2(y-7)$;
4. $(r+2)(r+3)$;
5. $(t-2)(2-t)$;
6. $z(2-z)$.

Exercice 2.6. Factoriser les expressions suivantes :

1. $2x+2y$;
2. $2a-4b$;
3. $x+bx$;
4. x^2-2x ;
5. $3z^2-(z+1)z^2$;
6. $2(y+1)-3(y+1)^2$.

Exercice 2.7. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1. $(x+1)^2$;
2. $(y-2)^2$;
3. $(z+2)(z-2)$;
4. $(2b-3)^2$.

Exercice 2.8. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1. $x^2 - 3^2$;
2. $25 - y^2$;
3. $a^2 + 2a + 1$;
4. $b^2 - 4b + 4$.

Exercice 2.9. Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 5 = 14$;
2. $2z + 3 = 12$;
3. $4 - 7r = 15$;
4. $4x + 6 = 8 - x$;
5. $(y+3)(7-y) = 0$;
6. $\dfrac{5a+3}{a+4} = 0$.

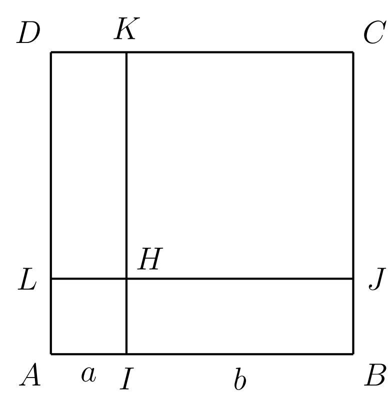
Exercice 2.10. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x - 5 > 4$;
2. $3z - 2 < 12$;
3. $7 - 4r \leq 5$;
4. $2y + 1 > -3y + 5$;
5. $\dfrac{1}{3}x - 7 \geq 0$;
6. $\dfrac{2}{5}a + 4 \leq \dfrac{1}{10}a$.

2.6.2 Approfondissement

Exercice 2.11. [Démonstration] On considère les carrés $ABCD$, $AIHL$ et $HJCK$ comme sur la figure ci-contre ; $AIHL$ de coté a et $HJCK$ de coté b.

1. Exprimer en fonction de a et b les aires des carrés $AIHL$, $HJCK$ et $ABCD$: $\mathcal{A}_{AIHL}$, $\mathcal{A}_{HJCK}$ et $\mathcal{A}_{ABCD}$.
2. Exprimer en fonction de a et b les aires des rectangles $IBJH$ et $LHKD$: $\mathcal{A}_{IBJH}$ et $\mathcal{A}_{LHKD}$.
3. Exprimer l'aire de $ABCD$ en fonction de celles des carrés $AIHL$ et $HJCK$, et des rectangles $IBJH$ et $LHKD$.
4. En déduire l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Exercice 2.12. Résoudre les équations suivantes :

1. $(2t+1)(4-t) = 0$;
2. $s(5s+6)(3s-2) = 0$;
3. $(x+2)(x^2-1) = 0$;
4. $9 - x^2 = 0$;
5. $(y+2)^2 - 25 = 0$;
6. $t^2 - 6t + 9 = 0$;
7. $\dfrac{(3z+12)z}{z^2+1} = 0$;
8. $\dfrac{u^2-4u+4}{2u^2+4} = 0$.

Exercice 2.13.

1. Développer l'expression $A = (x+2)^2 - 9$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Exercice 2.14.

1. Développer l'expression $A = (y-3)^2 - 49$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $y^2 - 6y - 40 = 0$.

2.6.3 Entraînement

Exercice 2.15. Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5}$;
2. $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{12}{20}$;
3. $7 - \dfrac{2}{3}$;
4. $\dfrac{z}{4} - \dfrac{2}{5}$;
5. $\dfrac{a}{18} \times \dfrac{6a}{7}$;
6. $\dfrac{3z}{5} - \dfrac{z}{8}$;
7. $\dfrac{5/6}{20/3}$;
8. $\dfrac{6/4}{8/9}$;
9. $\dfrac{10/35}{5/7}$;
10. $\dfrac{4/5}{8/15}$.

Exercice 2.16. Simplifier les expressions suivantes :

1. $5^4 \times 5^8$;
2. $\dfrac{17^4}{17^2}$;
3. $9^{30} \times 27^{18}$;
4. $\dfrac{(2a)^8}{4a^{10}}$;
5. $(3r)^4 \times (6r)^3$;
6. $\dfrac{n^{12} \times m^{32}}{n^{90} \times m^{15}}$.

Exercice 2.17. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les racines carrées suivantes avec a et b les plus petits possibles.

1. $\sqrt{18}$;
2. $\sqrt{75}$;
3. $\sqrt{40}$;
4. $\sqrt{128}$.

Exercice 2.18. Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $7(x+4)$;
2. $-2a(7+a)$;
3. $-4(3y+1)$;
4. $(r+5)(r-11)$;
5. $(2t-3)(4-5t)$;
6. $6z(7-3z)$.

Exercice 2.19. Factoriser les expressions suivantes :

1. $3x + 3y$;
2. $6a - 12b$;
3. $x + 2cx$;
4. $x^2 + 5x$;
5. $(7z+1)z^2 - 5z^2$;
6. $(y-8)^2 - 6(y-8)$.

Exercice 2.20. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1. $(x+2)^2$;
2. $(6-y)^2$;
3. $(z+7)(z-7)$;
4. $(3b-9)^2$.

Exercice 2.21. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

1. $x^2 - 5^2$;
2. $64 - y^2$;
3. $a^2 - 2a + 1$;
4. $b^2 + 6b + 9$.

Exercice 2.22. Résoudre les équations suivantes :

1. $x - 7 = 30$;
2. $4z - 3 = 21$;
3. $7 - 4r = 51$;
4. $6x + 4 = 1 - 8x$;
5. $(y + 7)(3 - y) = 0$;
6. $z(z + 1)(5z + 3) = 0$;
7. $\dfrac{3a + 5}{4a + 1} = 0$;
8. $\dfrac{y^2 - 36}{y^2 + 1} = 0$.

Exercice 2.23. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x + 6 > -3$;
2. $-3z + 5 > 2$;
3. $5 - 3r \leq 5$;
4. $-4y - 3 > y - 8$;
5. $\dfrac{1}{5}x - 8 \geq 0$;
6. $\dfrac{4}{7}a - 9 \leq \dfrac{3}{14}a$.

Exercice 2.24.

1. Développer l'expression $A = (z + 4)^2 - 36$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $z^2 + 8z - 20 = 0$.

Exercice 2.25.

1. Développer l'expression $A = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$.
2. Factoriser A.
3. En déduire les solutions de l'équation $t^2 - 3t - \dfrac{16}{4} = 0$.