

Évaluation

Algèbre booléenne

Sujet 2

17/10/2022

Note et remarques : / 10

Exercice 1. (/2) Dresser la table de vérité de la fonction booléenne ci-dessous. Préciser de quelle fonction il s'agit en réalité : l'équivalence $A \iff B$

$$f(A; B) = ((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A).$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee B$	$(\neg B) \vee A$	$f(A; B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

Exercice 2. (/3) Déterminer l'expression de la fonction booléenne f ayant la table de vérité ci-dessous. On réduira l'expression au maximum.

A	B	C	$f(A; B; C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

On additionne (OU) les produits (ET) dont le résultat est 1 :

$$(\neg A) \wedge B \wedge (\neg C) \quad \text{et} \quad A \wedge B \wedge (\neg C).$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(A; B) &= [(\neg A) \wedge B \wedge (\neg C)] \vee [A \wedge B \wedge (\neg C)] \\ &= [\neg A \vee A] \wedge B \wedge (\neg C) \quad (\text{factorisation par } (B \wedge (\neg C))) \\ &= 1 \wedge B \wedge (\neg C) \quad (\text{car } \neg A \vee A = 1) \\ &= B \wedge (\neg C). \end{aligned}$$

Exercice 3. (/5) Vous êtes en train de passer votre épreuve d’algèbre booléenne et votre machiavélique professeur vous place face à un dilemme : choisir entre la réponse A et la réponse D. Chaque réponse contient soit la réussite de l’épreuve, soit son échec. Afin de vous éprouver encore plus, les réponses peuvent parfois contenir toutes les deux l’échec ou la réussite de l’épreuve. Chaque réponse est accompagnée d’une indication :

- Pour la réponse A : I_1 = « Cette réponse contient la réussite et l’autre aussi » ;
- Pour la réponse D : I_2 = « Les deux réponses contiennent toutes les deux l’échec ou toutes les deux la réussite ».

Votre machiavélique professeur vous annonce qu’une seule des deux indications est vraie. On note

- A = « La réponse A contient la réussite de l’épreuve » ;
- D = « La réponse D contient la réussite de l’épreuve ».

1. Exprimer I_1 et I_2 en fonction de A et D .

On a

$$I_1 = A \wedge D \quad \text{et} \quad I_2 = A \iff D = (\neg A \vee D) \wedge (A \vee (\neg D)).$$

2. Dresser les tables de vérité de I_1 et I_2 en fonction de A et D .

A	D	$I_1 = A \wedge D$	$I_2 = A \iff D$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

3. En déduire quelle réponse choisir (ou ne pas choisir).

Comme une seule des deux indications est vraie (ce qui peut se traduire par $I_1 \oplus I_2$), la possibilité d’après le tableau ci-dessus est lorsque $I_1 = 0$ et $I_2 = 1$, donc lorsque $A = 0$ et $D = 0$. Il ne faut donc choisir aucune réponse et répondre au professeur que c’est un piège.