Évaluation

Généralités sur les fonctions

Sujet 3-B 23/11/2022

Note et remarques : / 16

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/2 points) Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-5	-2	$-0,5$	0,8	2,4	5	7
$h(z)$	-2	-1	-2	0	1,4	0	3

1. Quelle est l'image de 0,8 par h ? 0

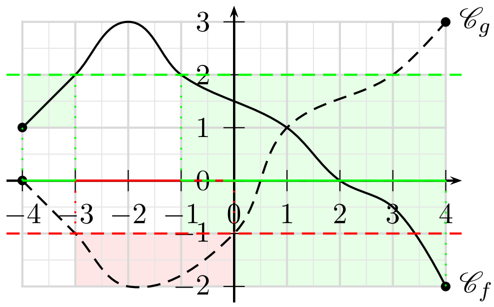
2. Quelle est l'image de -2 par h ? -1

3. Quels sont les éventuels antécédents de 3 par h ? 7

4. Quels sont les éventuels antécédents de -2 par h ? -5 et $-0,5$

Exercice 2. (/3 points)

Soit f et g deux fonctions définies par les courbes ci-contres. Les solutions données aux questions suivantes seront approximatives.



1. Quelle est l'image de -4 par g ? 0

2. Quels sont les éventuels antécédents de -1 par g ?

-3 et 0

3. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$. C'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ donc 1.

4. Résoudre graphiquement $g(x) < -1$. La solution est l'intervalle $]-3\,;0[$.

5. Résoudre graphiquement $f(x) \leq 2$. La solution est l'intervalle $[-4\,;-3] \cup [-1\,;4]$.

6. Résoudre graphiquement $g(x) < f(x)$. La solution est l'intervalle $[-4\,;1[$.

Exercice 3. (/7 POINTS) Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 63, \quad g(x) = 3(x-5)^2 - 12, \quad h(x) = 3(x-3)(x-7).$$

1. Montrer que f, g et h sont trois expressions d'une seule et même fonction.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= 3(x-5)^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 10x + 25) - 12 \\ &= 3x^2 - 30x + 75 - 12 \\ &= 3x^2 - 30x + 63 \\ &= f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(x-3)(x-7) \\ &= 3(x^2 - 3x - 7x + 21) \\ &= 3(x^2 - 10x + 21) \\ &= 3x^2 - 30x + 63 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = g(x) = h(x)$. Autrement, les trois fonctions sont égales.

2. En choisissant l'expression la plus adaptée de f, calculer l'image de 0.

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 30 \times 0 + 63 = 63.$$

3. En choisissant l'expression la plus adaptée de f, calculer l'image de $\sqrt{3} + 5$.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}+5) &= g(\sqrt{3}+5) \\ &= 3(\sqrt{3}+5-5)^2 - 12 \\ &= 3(\sqrt{3})^2 - 12 \\ &= 3 \times 3 - 12 \\ &= -3. \end{aligned}$$

4. En choisissant l'expression la plus adaptée de f, déterminer les éventuels antécédents de 0.

On cherche x tel que $f(x) = 0$, ou encore $h(x) = 0$ donc

$$3(x-3)(x-7) = 0.$$

D'après la règle du produit nul, soit $x - 3 = 0$, i.e. $x = 3$; soit $x - 7 = 0$, i.e. $x = 7$.

0 a donc pour antécédents 3 et 7.

5. En choisissant l'expression la plus adaptée de f, déterminer les éventuels antécédents de 63.

On cherche x tel que $f(x) = 63$, i.e.

$$\begin{aligned} f(x) &= 63 \\ 3x^2 - 30x + 63 &= 63 \\ 3x^2 - 30x &= 0 \\ 3x(x-10) &= 0. \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, soit $3x = 0$, i.e. $x = 0$; soit $x - 10 = 0$, i.e. $x = 10$.

63 a donc pour antécédents 0 et 10.

Exercice 4. (/4 POINTS)

1. Calculer $\dfrac{15}{8}\times\dfrac{24}{25}-\dfrac{20/9}{5/3}$.

$$\frac{15}{8}\times\frac{24}{25}-\frac{20/9}{5/3}=\frac{3\times5\times3\times8}{8\times5\times5}-\frac{20\times3}{9\times5}=\frac{9}{5}-\frac{4}{3}=\frac{27}{15}-\frac{20}{15}=\frac{7}{15}.$$

2. Calculer $\dfrac{(4m)^5}{2^{10}\times m^6}$.

On a

$$\frac{(4m)^5}{2^{10}\times m^6}=\frac{4^5\times m^5}{2^{10}\times m^6}=\frac{(2^2)^5\times m^{5-6}}{2^{10}}=\frac{2^{10}\times m^{-1}}{2^{10}}=\frac{1}{m}.$$

3. Résoudre l'inéquation $-6y-15<6$.

$$\begin{aligned}-6y-15&<6\\-6y&<21\\y&>-\frac{21}{6}\quad\text{on change le sens de l'inégalité car on divise par }-6\\y&>-\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left]-\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$.

4. Écrire $\sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers les plus petits possibles.

$$\sqrt{48}=\sqrt{5\times9}=\sqrt{5}\times\sqrt{9}=3\sqrt{5}.$$