NOM : Prénom : Groupe : 2^{de} 10

Évaluation

Géométrie plane

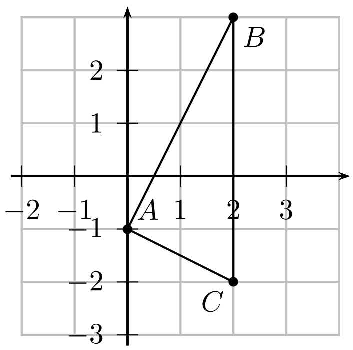
Sujet 3-A 07/11/2022

Note et remarques : / 16

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/4 POINTS)



1. Quelles sont les coordonnées de A, B et C ?

On a $A\,(0\,;-1)$, $B\,(2\,;3)$ et $C\,(2\,;-2)$.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

ABC semble être rectangle en A. Calculons les distances AC, BC et AB afin de le vérifier.

$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}\\ &= \sqrt{(2-0)^2 + (-2-(-1))^2}\\ &= \sqrt{4+1}\\ &= \sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\\ &= \sqrt{(0-2)^2 + (-1-3)^2}\\ &= \sqrt{4+16}\\ &= \sqrt{20}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}\\ &= \sqrt{(2-2)^2 + (-2-3)^2}\\ &= \sqrt{0+25}\\ &= 5.\end{aligned}$$

On a

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2 = 25$$

et

$$BC^2 = 25$$

donc

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

Exercice 2. (/3 POINTS) Soient $A(8\,;10)$, $B(-3\,;5)$ et $C(0\,;12)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées du point $D\,(x_D\,;y_D)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux. On note M le milieu de la diagonale $[AC]$. On a

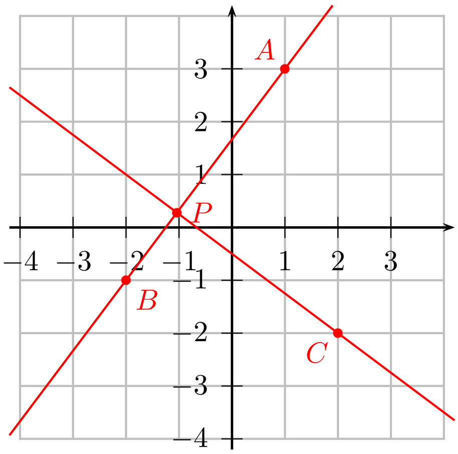
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{8+0}{2} = 4 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{10+12}{2} = 11.$$

Mais M est aussi le milieu de $[BD]$ donc

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ 4 &= \frac{5 + x_D}{2} \\ 8 &= 5 + x_D \\ x_D &= 3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 11 &= \frac{5 + y_D}{2} \\ 22 &= 5 + y_D \\ y_D &= 17. \end{aligned}$$

Il faut donc $D\,(3\,;16)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3. (/2 points) Construire à la règle et au compas sur le repère suivant le projeté orthogonal P de C sur la droite (AB) où $A\,(1\,;3)$, $B\,(-2\,;-1)$ et $C\,(2\,;-2)$.



Exercice 4. (/3 points) Soit ABC un triangle rectangle en B. On sait que $AC = 2$ et $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$ et AB.

On a

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1,$$

donc

$$\cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

En prenant la racine carrée, on en déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}$.

Comme $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC}$, on en déduit que

$$AB = AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Exercice 5. (/4 POINTS)

1. Développer $A = (y-6)^2 - 81$.

$$(y-6)^2 - 81 = y^2 - 12y + 36 - 81 = y^2 - 12y - 45.$$

2. Factoriser A.

$$A = (y-6)^2 - 81 = (y-6)^2 - 9^2 = (y-6+9)(y-6-9) = (y+3)(y-15).$$

3. Résoudre l'équation $(y+3)(y-15) = 0$.

D'après la règle du produit nul, on a soit $y+3=0$ i.e. $y=-3$, soit $y-15=0$ i.e. $y=15$. Les solutions sont donc -3 et 15.

4. En déduire les solutions de l'équation $y^2 - 12y - 45 = 0$.

D'après la question 2, on $y^2 - 12y - 45 = A = (y+3)(y-15)$. Les solutions de $y^2 - 12y - 45 = 0$ sont donc les solutions de $(y+3)(y-15) = 0$, i.e. -3 et 15.