NOM : Prénom : Groupe : 2de 10

Évaluation

Géométrie plane

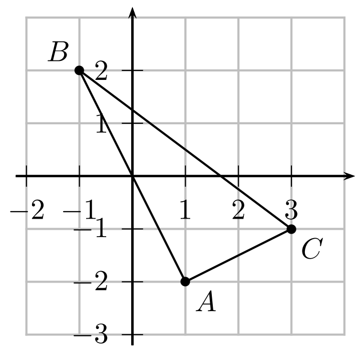
Sujet 3-B 07/11/2022

Note et remarques : / 16

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/4 POINTS)



1. Quelles sont les coordonnées de A, B et C ?

On a $A\,(1\,;-2)$, $B\,(-1\,;2)$ et $C\,(3\,;-1)$.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

ABC semble être rectangle en A. Calculons les distances AC, BC et AB afin de le vérifier.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= 5. \end{aligned}$$

On a

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2 = 25$$

et

$$BC^2 = 25$$

donc

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

Exercice 2. (/3 POINTS) Soient $A(0\,;5)$, $B(5\,;1)$ et $C(2\,;-3)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées du point $D\,(x_D\,;y_D)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux. On note M le milieu de la diagonale $[AC]$. On a

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+(-3)}{2} = 1.$$

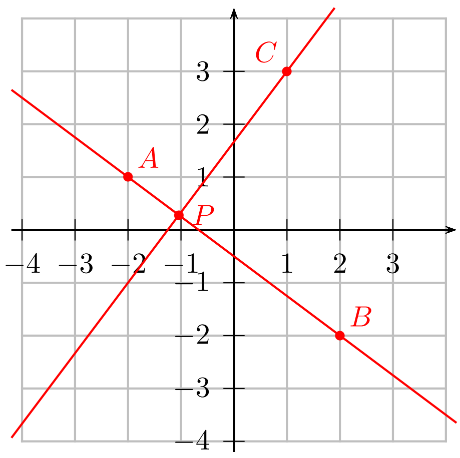
Mais M est aussi le milieu de $[BD]$ donc

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ 1 &= \frac{5 + x_D}{2} \\ 2 &= 5 + x_D \\ x_D &= -3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 1 &= \frac{1 + y_D}{2} \\ 2 &= 1 + y_D \\ y_D &= 1. \end{aligned}$$

Il faut donc $D\,(-3\,;1)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3. (/2 POINTS) Construire à la règle et au compas sur le repère suivant le projeté orthogonal P de C sur la droite (AB) où $A\,(-2\,;1)$, $B\,(2\,;-2)$ et $C\,(1\,;3)$.



Exercice 4. (/3 POINTS) Soit ABC un triangle rectangle en B. On sait que $AC = 2$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}$. Déterminer $\sin(\widehat{BAC})$ et AB.

On a

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1,$$

donc

$$\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

En prenant la racine carrée, on en déduit que $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$, on en déduit que

$$AB = AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Exercice 5. (/4 POINTS)

1. Développer $A = (z+5)^2 - 64$.

$$(z+5)^2 - 64 = z^2 + 10z + 25 - 64 = z^2 + 10z - 39.$$

2. Factoriser A.

$$A = (z+5)^2 - 64 = (z+5)^2 - 8^2 = (z+5+8)(z+5-8) = (z+13)(z-3).$$

3. Résoudre l'équation $(z+13)(z-3) = 0$.

D'après la règle du produit nul, on a soit $z + 13 = 0$ i.e. $z = -13$, soit $z - 3 = 0$ i.e. $z = 3$. Les solutions sont donc -13 et 3.

4. En déduire les solutions de l'équation $z^2 + 10z - 39 = 0$.

D'après la question 2, on $z^2 + 10z - 39 = A = (z+13)(z-3)$. Les solutions de $z^2 + 10z - 39 = 0$ sont donc les solutions de $(z+13)(z-3) = 0$, i.e. -13 et 3.