Chapitre 6

Variations et extremums de fonctions

6.1 Variations

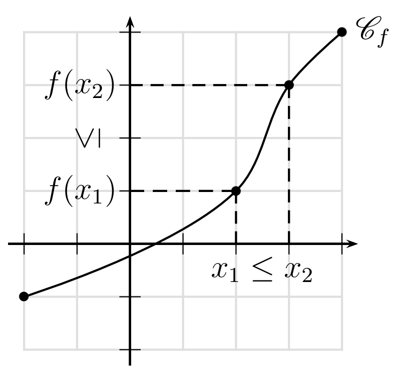
6.1.1 Définition

Définition 6.1. *Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

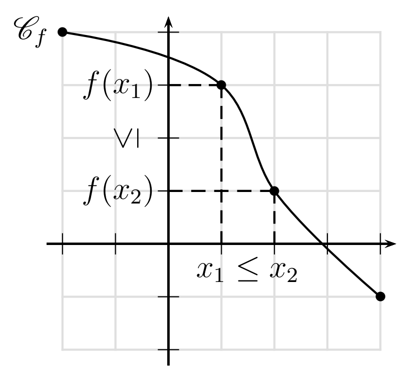
— *f est dite* ***croissante*** *sur I si pour tous x_1, $x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

— *f est dite* ***décroissante*** *sur I si pour tous x_1, $x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

— *f est dite* ***monotone*** *sur I si elle n'est que croissante ou que décroissante sur I.*



f croissante



f décroissante

Remarques :

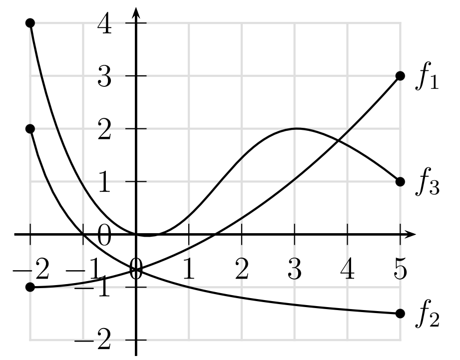
— Une fonction croissante **conserve** les inégalités.

— Une fonction décroissante **change** les inégalités.

— On pourrait dire qu'une fonction croissante – respectivement décroissante – est une fonction dont la courbe « monte » – respectivement « descend » – lorsque l'on va de la gauche vers la droite.

Exemples graphiques :

- f_1 est croissante sur $[-2\,;5]$;
- f_2 est décroissante sur $[-2\,;5]$;
- f_3 est ni croissante, ni décroissante sur $[-2\,;5]$.



Exemples de comparaison d'images :

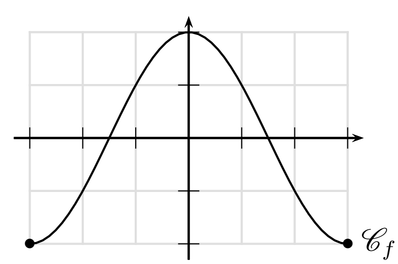
1. Soit f une fonction croissante sur $[4\,;10]$. Comparons $f(5)$ et $f(8)$, comme $5 \leq 8$ et f croissante, on a $f(5) \leq f(8)$.
2. Soit g une fonction décroissante sur $[-1\,;+\infty[$. Comparons $g(0)$ et $g(100)$, comme $0 \leq 100$ et g décroissante, on a $g(0) \geq g(100)$.

6.1.2 Tableau de variation

Les variations d'une fonction f peuvent être synthétisées à l'aide d'un tableau dit **tableau de variations**. Celui est composé de deux lignes : la première contient les bornes des intervalles sur lesquels f est monotone ; la seconde contient des flèches représentant les variations de f (montantes si f croissante, descendantes si f décroissante).

Exemples :

On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre. La fonction f est croissante sur $[-3\,;0]$ puis décroissante sur $[0\,;3]$. On trouve le tableau de variations qui y est associé ci-dessous.



x	-3		0		3
$f(x)$	-2	↘	2	↗	-2

★ Vidéo.

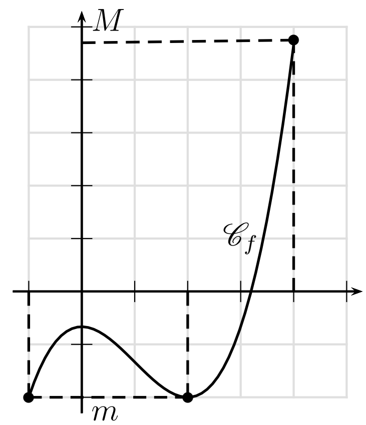
6.2 Extremums d'une fonction

Définition 6.2. *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

- *On dit que M est un* ***maximum*** *de f sur I s'il existe $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = M$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.*
- *On dit que m est un* ***minimum*** *de f sur I s'il existe $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = m$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq m$.*

Exemple :

On considère la fonction f et g représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre. On peut voir graphiquement que f admet un maximum : $4,75$ atteint en 4 ; et un minimum : -2 atteint en -1 et 2.



Exemple : Soit une fonction f définie sur $[-1\,;5]$ ayant pour tableau de variations celui ci-dessous.

x	-1	1	5
$f(x)$	2 ↘	-1	↗ 3

f admet pour maximum 3 atteint en 5 et pour minimum -1 atteint en 1.

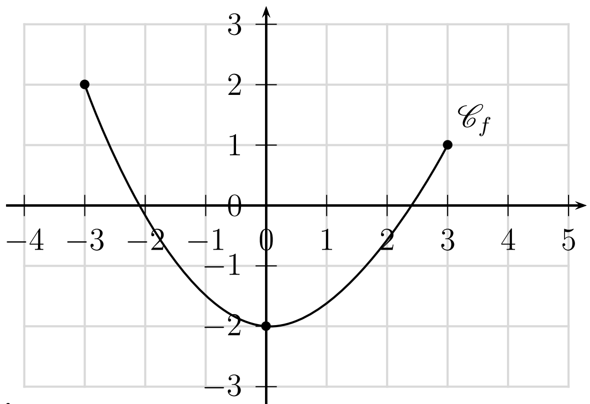
6.3 Attendus et savoir-faire

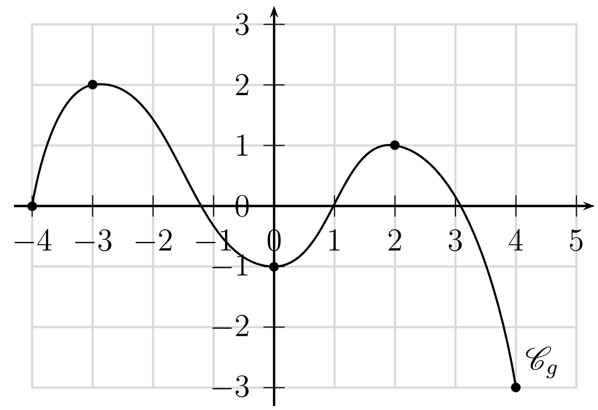
- Décrire les variations d'une fonction à partir d'une situation (tableau, courbe, problème...).
- Faire le tableau de variations d'une fonction à partir de sa courbe.
- Dessiner une courbe possible d'une fonction à partir de son tableau de variations.
- Comparer deux images d'une fonction.
- Trouver les minimum et maximum d'une fonction à partir de sa courbe ou de son tableau de variations.
- Montrer qu'un nombre n'est pas le minimum ou le maximum d'une fonction en exhibant un contre-exemple.

6.4 Exercices

6.4.1 Démarrage

Exercice 6.1. Soient deux fonctions représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions puis donner leurs tableaux de variations.





Exercice 6.2.

Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-contre.

x	-4		-2		1
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

Exercice 6.3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ telle que :

— f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

— f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

— $f(0) = f(4) = 5\,;\ f(2) = 10$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$. Tracer une courbe pouvant représenter cette fonction.

Exercice 6.4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer qui de $f(-1)$ ou de $f(1)$ est le plus grand.

1. lorsque f est croissante.
2. lorsque f est décroissante.

Exercice 6.5. Déterminer graphiquement les extremums des deux fonctions de l'exercice 6.1.

Exercice 6.6. On considère une fonction dont on a le tableau de variations ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition et les extremums de f selon ce tableau.

x	-4		-2		1		3		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

6.4.2 Approfondissement

Exercice 6.7. On considère une fonction f dont on a le tableau de variations ci-dessous.

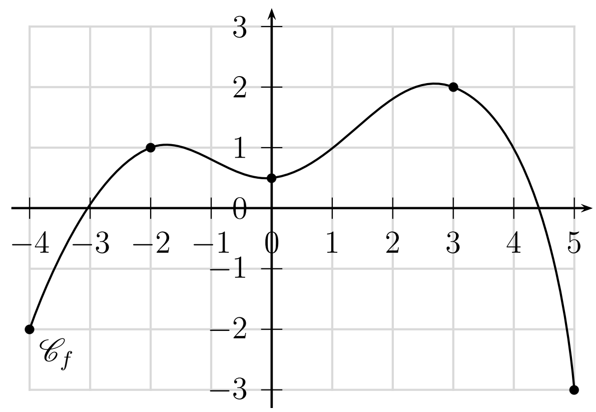
1. Décrire par des phrases les variations de f.
2. Quels sont les extremums de f ?
3. Quel est le signe de f ?

x	-5		-1		0		4
$f(x)$	0	↘	-3	↗	-2	↘	-5

Exercice 6.8. Soit f une fonction définie sur $[-4\,;5]$ dont on a la courbe ci-dessous.

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse en justifiant. Sur $[-4\,;5]$:

1. le maximum de f est $(3\,;2)$.
2. le maximum de f est 3.
3. le maximum de f est 2, atteint en 3.
4. le minimum de f est 5.
5. f atteint son minimum en 0.
6. le minimum de f est -3.



Exercice 6.9. Pour chacun de ces tableaux, dire s'il peut être ou non le tableau de variation correct d'une fonction.

x	-2		1		10
$f(x)$	0	↗	-1	↘	-5

x	-4		-1		9
$g(x)$	1	↘	-3	↗	5

x	-5		10		1
$h(x)$	5	↗	10	↘	-5

Exercice 6.10. Soit f une fonction définie sur $[-2\,;4]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-2		0		2		4
$f(x)$	3	↘	-1	↗	2	↘	1

1. Tracer une possible courbe représentative de f.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier si faux.

   (a) 3 est le maximum de f sur $[0\,;4]$.

   (b) 0 est le minimum de f sur $[-2\,;2]$.

   (c) f est décroissante sur $[2,5\,;3]$.

   (d) le maximum de f est 4.

3. Comparer $f(0,5)$ et $f(1)$, justifier.
4. Comparer $f(-2)$ et $f(3)$, justifier.

Exercice 6.11. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-6		-4		-1		0		2		5		6		8
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -1 par f ?
3. Déterminer le maximum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-4\,;0]$.
5. Compléter :
   — Lorsque $x \in [-6\,;-1]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....
   — Lorsque $x \in [0\,;8]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....
6. Comparer $f(3)$ et $f(4)$. Justifier.
7. Comparer $f(-2)$ et $f(-3)$. Justifier.
8. Comparer $f(-5)$ et $f(7)$. Justifier.
9. Sachant que la fonction ne fait aucun saut, déterminer les intervalles dans lesquels se situent les solutions de $f(x) = 0$.
10. Tracer une courbe qui peut représenter la fonction f.

Exercice 6.12. [Composée de deux fonctions] Soient $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ et I trois ensembles de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D}_f \to I$ et $g : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. La **composée** de f par g est la fonction $h : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ qui à tout réel x de $\mathcal{D}_g$ associe le réel $h(x) = g(f(x))$. On pourrait résumer cela par le schéma suivant :

$$h : x \underset{f}{\mapsto} f(x) \underset{g}{\mapsto} g(f(x)).$$

Par exemple ; si $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2$,

$$h(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = (3x-1)^2.$$

Il ne faut pas confondre avec la composée de g par f. En effet, en reprenant cet exemple, on a

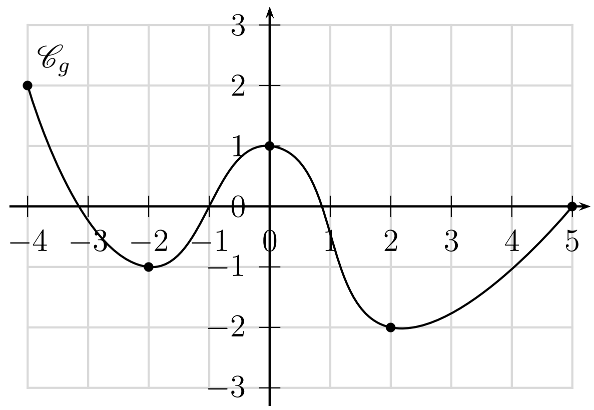
$$f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 1 \neq (3x-1)^2 = g(f(x)).$$

1. À quelle condition sur I, la composée h de f par g est-elle bien définie ?
2. Dans chacun des cas suivants, à l'aide des définitions, déterminer si h est croissante ou décroissante.

   (a) f et g croissante.
   (b) f croissante, g décroissante.
   (c) f décroissante, g croissante.
   (d) f et g décroissantes.

6.4.3 Entraînement

Exercice 6.13. Soit la fonction représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction puis donner son tableau de variations.



Exercice 6.14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer qui de $f(x_1)$ ou de $f(x_2)$ est le plus grand.

1. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ et f décroissante.
2. $x_1 = -5$, $x_2 = 7$ et f croissante.
3. $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ et f décroissante.
4. $x_1 = \dfrac{5}{6}$, $x_2 = \dfrac{6}{7}$ et f croissante.

Exercice 6.15. Déterminer graphiquement les extremums des deux fonctions de l'exercice 6.1.

Exercice 6.16. On considère une fonction dont on a le tableau de variations ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition et les extremums de f selon ce tableau.

x	-4	-2	1	3	5
$f(x)$	2 ↘	-3 ↗	-2 ↘	-4 ↗	0

Exercice 6.17. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-20		-15		-8		-1		3		4		8		10
$f(x)$	3	$\nearrow$	12	$\searrow$	6	$\nearrow$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -8 par f ?
3. Déterminer le minimum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-1\,;4]$.
5. Compléter :
   — Lorsque $x \in [-15\,;-1]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....
   — Lorsque $x \in [3\,;10]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....
6. Comparer $f(0)$ et $f(1)$. Justifier.
7. Comparer $f(-18)$ et $f(-17)$. Justifier.
8. Comparer $f(-19)$ et $f(5)$. Justifier.
9. Sachant que la fonction ne fait aucun saut, déterminer les intervalles dans lesquels se situent les solutions de $f(x) = 0$.
10. Tracer une courbe qui peut représenter la fonction f.