Évaluation

Vecteurs

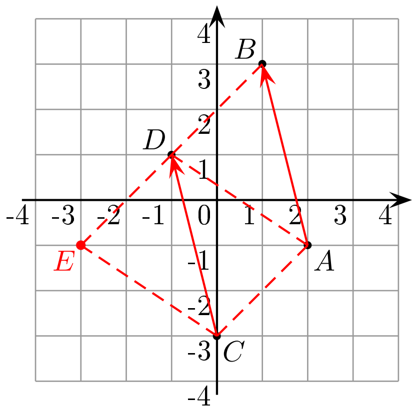
Sujet 3-B 26/01/2023

Note : / 16 **Soin et maîtrise du langage :** / 2 **Total :** / 18

Instructions générales :
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/4 POINTS)

Soient A, B, C et D quatre points du plan représentés ci-contre.



1. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Par lecture graphique, on trouve
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

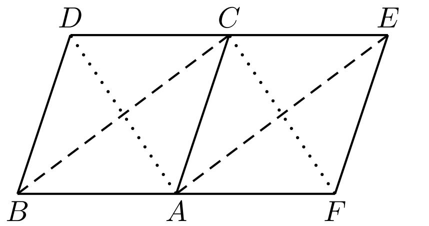
3. Calculer les coordonnées du point E tel que $ADEC$ soit un parallélogramme.

$ADEC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On note $(x_E\,;y_E)$ les coordonnées de E, on a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{cases} x_E = -3, \\ y_E + 3 = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = -3, \\ y_E = -1. \end{cases}$$

Exercice 2. (/3 POINTS)

Sur la figure ci-contre, les quadrilatères $ABDC$, $FACE$, $FADC$ et $ABCE$ sont des parallélogrammes. Remplacer les sommes vectorielles suivantes par un unique vecteur. Justifier.



1. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$.

Par règle du parallélogramme, on a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.

2. $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}$.

Par relation de Chasles, on a $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{FB}$.

3. $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CF}$.

Par relation de Chasles et règle du parallélogramme, on a $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DC}$.

Exercice 3. (/3 POINTS)

Soient $A\,(-1\,;3)$, $B\,(4\,;0)$ et $C\,(2\,;-2)$ trois points du plan.

1. Calculer les coordonnées de $3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\left[3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]\begin{pmatrix} 3\times 5+\dfrac{1}{2}\times(-2) \\ 3\times(-3)+\dfrac{1}{2}\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les coordonnées du point M définie par $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Soit $M\,(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix}$. Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, on a

$$\begin{cases} x-4=14, \\ y=-10, \end{cases} \iff \begin{cases} x=18, \\ y=-10. \end{cases}$$

Exercice 4. (/6 POINTS)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2, \quad h(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+1).$$

1. Montrer que $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.

On développe $g(x)$ et $h(x)$ pour montrer qu'ils sont égaux à $f(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + 2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + 2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{2}(x-3)(x+1) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + x - 3x - 3) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2. Déterminer l'image de 0 par f. *Indication :* on choisira l'expression de f la plus adaptée.

On a

$$f(0) = -\frac{1}{2} \times 0^2 + 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

3. Déterminer l'image de 1 par f. *Indication :* on choisira l'expression de f la plus adaptée.

On a

$$f(1) = -\frac{1}{2}(1-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2.$$

4. Déterminer les éventuels antécédents de 0 par f. *Indication :* on choisira l'expression de f la plus adaptée.

On veut résoudre $f(x) = 0$. On choisit l'expression $-\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$ de f car elle permet d'utiliser la règle du produit nul, ce qui donne

soit

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

0 a donc deux antécédents, -1 et 3.

5. Déterminer les éventuels antécédents de $\frac{3}{2}$ par f. *Indication :* on choisira l'expression de f la plus adaptée.

On veut résoudre $f(x) = \frac{3}{2}$. On choisit l'expression $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ de f car elle donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} &= \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2 + x &= 0 \\ x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Par règle du produit nul, on a $x = 0$, ou

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 1 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x &= -1 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}$ a donc deux antécédents, 2 et 0 (que l'on avait déjà trouvé dans une question précédente).