NOM : Prénom : Groupe : 2^{de} 10

Évaluation

Colinéarité - Fonctions affines

Sujet 2-A 09/03/2023

Note : / 15 **Soin et maîtrise du langage :** / 2 **Total :** / 17

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/3) Soient $C(-8\,;2)$, $D(0\,;4)$ et $E(-3\,;-1)$ trois points du plan. Le point C appartient-il à la droite (DE) ?

C appartient à la droite (DE),
si et seulement si C, D et E sont alignés,
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le déterminant

$$\det\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{CD}\right) = x_1y_2 - x_2y_1 = (-3)\times 2 - 8\times(-5) = -6+40 = 34 \neq 0.$$

C n'appartient pas donc à (DE).

Exercice 2. (/3) Soient $A\,(1\,;-4)$, $B\,(0\,;3)$, $M\,(-1\,;5)$ et $N\,(x\,;8)$. Déterminer la valeur de x telle que (AB) et (MN) soient parallèles.

(AB) et (MN) sont parallèles
si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le déterminant est nul si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1y_2 - x_2y_1 =& 0 \\ (-1)\times 3 - (x+1)\times 7 =& 0 \\ -3 - 7x - 7 =& 0 \\ -7x =& 10 \\ x =& -\frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Exercice 3. (/2) Soient $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$ et $C\,(x_C\,;y_C)$ trois points du plan. Compléter l'algorithme suivant visant à déterminer si A, B et C sont alignés.

Algorithme 1 : Alignement

Données : x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
Début
  $x_1 \leftarrow x_B - x_A$
  $y_1 \leftarrow y_B - y_A$
  $x_2 \leftarrow x_C - x_A$
  $y_2 \leftarrow x_C - x_A$
  $d \leftarrow x_1y_2 - x_2y_1$
  Si $d = 0$ **:**
    Sorties : A, B et C sont alignés

  Sinon Si $d \neq 0$ **:**
    Sorties : A, B et C ne sont pas alignés

Fin

Exercice 4. (/3) Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= 2\left(\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{CB}\right)\\
&= 2\overrightarrow{AB} - 14\overrightarrow{CB}\\
&= 2\overrightarrow{AB} - 14\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \quad \text{relation de Chasles}\\
&= 2\overrightarrow{AB} + 14\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AB}\\
&= -12\overrightarrow{AB} + 14\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On en déduit que $12\overrightarrow{AB} = 13\overrightarrow{AC}$ i.e. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{12}{13}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A, B et C alignés.

Exercice 5. (/2) Résoudre l'inéquation $(5x-3)(4-x) \geq 0$.

On a $5x-3=0$ si et seulement si $x=\dfrac{3}{5}$. De même, $4-x=0$ si et seulement si $x=4$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		4		$+\infty$
$5x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x-3)$ $\times(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[\dfrac{3}{5}\,;4\right]$.

Exercice 6. (/2) Résoudre l'inéquation $\dfrac{7+14x}{3-9x} \leq 0$.

On a $7+14x=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{1}{2}$. De même, $3-9x=0$ si et seulement si $x=\dfrac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$7+14x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-9x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{7+14x}{3-9x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.