NOM : **Prénom :** **Groupe : 2^de^ 10**

Évaluation

Colinéarité - Fonctions affines

Sujet 2-B

09/03/2023

Note : / 15 **Soin et maîtrise du langage :** / 2 **Total :** / 17

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/3) Soient $A\,(1\,;-4)$, $B\,(0\,;3)$, $M\,(-1\,;5)$ et $N\left(-\frac{10}{7}\,;8\right)$ quatre points du plan. Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ?

(AB) et (MN) sont parallèles
si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3/7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On calcule alors le déterminant

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{MN}\right) = x_1y_2 - x_2y_1 = (-1)\times 3 - \left(-\frac{3}{7}\right)\times 7 = -3+3 = 0.$$

(AB) et (MN) sont donc parallèles.

Exercice 2. (/3) Soient $C(x\,;2)$, $D(0\,;4)$ et $E(-3\,;-1)$ trois points du plan. Pour quelle valeur de x le point C appartient-il à la droite (DE) ?

C appartient à la droite (DE),
si et seulement si C, D et E sont alignés,
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires,
si et seulement si leur déterminant est nul.

On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -x \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le déterminant est nul si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \\ (-x)\times(-5) - (-3)\times 2 &= 0 \\ 5x + 6 &= 0 \\ 5x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Nom : **Prénom :** **Groupe : 2^de^ 10**

Exercice 3. (/2) Soient $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$, $C\,(x_C\,;y_C)$ et $D\,(x_D\,;y_D)$ quatre points du plan. Compléter l'algorithme suivant visant à déterminer si (AB) et (CD) sont parallèles.

Algorithme 1 : Parallélisme

```
Données : x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D
Début
    x_1 ← x_B − x_A
    y_1 ← y_B − y_A
    x_2 ← x_D − x_C
    y_2 ← x_D − x_C
    d ← x_1 y_2 − x_2 y_1
    Si d = 0 :
        Sorties : (AB) et (CD) sont parallèles

    Sinon Si d ≠ 0 :
        Sorties : (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

Fin
```

Exercice 4. (/3) Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = 5\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= 5\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}\right) \\
&= 5\overrightarrow{AB} - 15\overrightarrow{CB} \\
&= 5\overrightarrow{AB} - 15\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \quad \text{relation de Chasles} \\
&= 5\overrightarrow{AB} + 15\overrightarrow{AC} - 15\overrightarrow{AB} \\
&= -10\overrightarrow{AB} + 15\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On en déduit que $14\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{AB}$ i.e. $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A, B et C alignés.

Exercice 5. (/2) Résoudre l'inéquation $(3x-5)(8-x) \geq 0$.

On a $3x-5=0$ si et seulement si $x=\frac{5}{3}$. De même, $8-x=0$ si et seulement si $x=8$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		8		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$8-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-5)$ $\times(8-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left[\frac{5}{3};8\right]$.

Exercice 6. (/2) Résoudre l'inéquation $\dfrac{5+20x}{2-8x} \leq 0$.

On a $5+20x=0$ si et seulement si $x=-\frac{1}{4}$. De même, $2-8x=0$ si et seulement si $x=\frac{1}{4}$. On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$5+20x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-8x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{5+20x}{2-8x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que la solution de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$.