

Évaluation

Fonctions carré et cube - Probabilités

La calculatrice n'est pas autorisée

Sujet 2-A

13/04/2023

Note : / 18 Soins et maîtrise du langage : / 2 Total : / 20

Exercice 1. (/3)1. Résoudre l'équation $(7 - 5x)^2 = 64$.

Les antécédents de 64 par la fonction carrée étant 8 et -8, on a donc deux possibilités

$$\begin{aligned} 7 - 5x &= -8 \\ -5x &= -15 \\ x &= 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 - 5x &= 8 \\ -5x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On a donc deux solutions : $-\frac{1}{5}$ et 3.2. Résoudre l'équation $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right)^3 = -1$.

L'antécédent de -1 par la fonction cube étant -1 on a donc

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} &= -1 \\ \frac{2}{3}x &= -\frac{7}{6} \\ x &= -\frac{7}{6} \times \frac{3}{2} \\ x &= -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

On a donc pour solution $-\frac{7}{4}$.**Exercice 2.** (/1) Déterminer un encadrement de $4 - 2x^2$ pour $-4 \leq x \leq 2$.

On a

$$\begin{aligned} -4 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq x^2 \leq 16 \\ 0 &\geq -2x^2 \geq -32 \\ 4 &\geq 4 - 2x^2 \geq -28. \end{aligned}$$

Exercice 3. (/2) Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ est croissante sur \mathbb{R} .

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \\x_1^3 &\leq x_2^3 \quad \text{car la fonction cube est croissante sur } \mathbb{R} \\ \frac{1}{3}x_1^3 &\leq \frac{1}{3}x_2^3 \\ \frac{1}{3}x_1^3 - 1 &\leq \frac{1}{3}x_2^3 - 1 \\ f(x_1) &\leq f(x_2).\end{aligned}$$

f conserve l'ordre, elle est donc croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 4. (/2) Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (2 - 7x)^2 + 8$ est croissante sur $\left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$.

Soient $x_1, x_2 \in \left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} &\leq x_1 \leq x_2 \\ -2 &\geq -7x_1 \geq -7x_2 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\ 0 &\geq 2 - 7x_1 \geq 2 - 7x_2 \\ (2 - 7x_1)^2 &\leq (2 - 7x_2)^2 \quad \text{car la fonction carré est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\ (2 - 7x_1)^2 + 8 &\leq (2 - 7x_2)^2 + 8 \\ g(x_1) &\leq g(x_2).\end{aligned}$$

g conserve l'ordre, elle est donc croissante sur $\left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$.

Exercice 5. (/4)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 9x^2$ et $g(x) = -12x^3$. Étudier les positions relatives des courbes de f et g : \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Pour étudier les positions relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , on va étudier le signe de $f - g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - g(x) = 9x^2 - (-12x^3) = 9x^2 + 12x^3 = 3 \times 3x^3 + 4x \times 3x^2 = 3x^2(3 + 4x).$$

$3x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $3 + 4x = 0$ si et seulement si $x = -\frac{3}{4}$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	0	$+\infty$
$3x^2$	+	0	+	+
$3 + 4x$	-	0	+	+
$f - g$	-	0	+	+

$f - g$ est positive sur $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur cet intervalle ; \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g sur $\left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

Exercice 6. (/6) On s'intéresse ici aux types des pokémons, notamment aux types vol et feu. On note F l'événement « le pokémon est de type feu » et V l'événement « le pokémon est de type vol ». On obtient les données suivantes : $\mathbb{P}(F) = \frac{10}{150}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{18}{150}$ et $\mathbb{P}(F \cap V) = \frac{2}{150}$. On laissera tous les résultats sous forme de fractions.

1. Exprimer en français les événements \overline{F} et $V \cap F$.

\overline{F} : le pokémon n'est pas de type feu.
 $V \cap F$: le pokémon est de type feu et vol.

2. Exprimer à l'aide de V et F l'événement « le pokémon est de type vol ou feu » et « le pokémon n'est ni de type vol ni de type feu ».

« Le pokémon est de type vol ou feu » : $V \cup F$.
« Le pokémon n'est ni de type vol ni de type feu » : $\overline{V \cap F}$.

3. Calculer la probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu puis qu'il ne soit pas de type vol.

La probabilité qu'il ne soit pas de type feu $\mathbb{P}(\overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(F) = \frac{140}{150}$.
La probabilité qu'il ne soit pas de type vol est $\mathbb{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = \frac{132}{150}$.

4. Calculer la probabilité que le pokémon soit de type vol ou feu.

$$\mathbb{P}(V \cup F) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(V \cap F) = \frac{18}{150} + \frac{10}{150} - \frac{2}{150} = \frac{26}{150}.$$

5. En déduire $\mathbb{P}(\overline{V \cup F})$.

$$\mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = 1 - \mathbb{P}(V \cup F) = 1 - \frac{26}{150} = \frac{124}{150}.$$

6. Calculer la probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol. *Indication* : on pourra commencer par écrire cet événement à l'aide de V et F puis utiliser le fait que $\overline{V \cap F} = \overline{V} \cup \overline{F}$.

L'événement « le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol » est $\overline{V \cap F}$. On a

$$\mathbb{P}(\overline{V \cap F}) = \mathbb{P}(\overline{V}) + \mathbb{P}(\overline{F}) - \mathbb{P}(\overline{V} \cap \overline{F}).$$

D'après l'indication, on a $\mathbb{P}(\overline{V \cap F}) = \mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = \frac{124}{150}$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = \frac{132}{150} + \frac{140}{150} - \frac{124}{150} = \frac{148}{150}.$$

La probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol est de $\frac{148}{150}$.