

Évaluation

Fonctions carré et cube - Probabilités

La calculatrice n'est pas autorisée

Sujet 2-B

13/04/2023

Note : / 18 Soins et maîtrise du langage : / 2 Total : / 20

Exercice 1. (/3)

1. Résoudre l'équation $(9 + 6x)^2 = 81$.

Les antécédents de 64 par la fonction carrée étant 9 et -9, on a donc deux possibilités

$$9 + 6x = -9$$

$$6x = -18$$

$$x = -3,$$

$$9 + 6x = 9$$

$$6x = 0$$

$$x = 0.$$

On a donc deux solutions : 0 et 3.

2. Résoudre l'équation $\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{10}\right)^3 = -8$.

L'antécédent de -8 par la fonction cube étant -2 on a donc

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{10} = -2$$

$$\frac{3}{5}x = -\frac{21}{10}$$

$$x = -\frac{21}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{7}{2}.$$

On a donc pour solution $-\frac{7}{2}$.Exercice 2. (/1) Déterminer un encadrement de $-12x^2 + 5$ pour $-2 \leq x \leq 1$.

On a

$$-2 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 4$$

$$0 \geq -12x^2 \geq -48$$

$$5 \geq -12x^2 + 5 \geq -43.$$

Exercice 3. (/2) Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2$ est décroissante sur \mathbb{R} .

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \\x_1^3 &\leq x_2^3 \quad \text{car la fonction cube est croissante sur } \mathbb{R} \\-\frac{1}{4}x_1^3 &\geq -\frac{1}{4}x_2^3 \quad \text{car on multiplie par un nombre négatif} \\-\frac{1}{4}x_1^3 + 2 &\geq -\frac{1}{4}x_2^3 + 2 \\f(x_1) &\geq f(x_2).\end{aligned}$$

f ne conserve pas l'ordre, elle est donc décroissante sur \mathbb{R} .

Exercice 4. (/2) Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (3 + 8x)^2 - 1$ est décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{3}{8} \right]$.

Soient $x_1, x_2 \in \left] -\infty; -\frac{3}{8} \right]$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \leq -\frac{3}{8} \\8x_1 &\leq 8x_2 \leq -3 \\3 + 8x_1 &\leq 3 + 8x_2 \leq 0 \\(3 + 8x_1)^2 &\geq (3 + 8x_2)^2 \quad \text{car la fonction carré est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\(3 + 8x_1)^2 - 1 &\geq (3 + 8x_2)^2 - 1 \\g(x_1) &\geq g(x_2).\end{aligned}$$

g ne conserve pas l'ordre, elle est donc décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{3}{8} \right]$.

Exercice 5. (/4)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 15x^2$ et $g(x) = -6x^3$. Étudier les positions relatives des courbes de f et g : \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Pour étudier les positions relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , on va étudier le signe de $f - g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - g(x) = 15x^2 - (-6x^3) = 15x^2 + 6x^3 = 5 \times 3x^2 + 2x \times 3x^2 = 3x^2(5 + 2x).$$

$3x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $5 + 2x = 0$ si et seulement si $x = -\frac{2}{5}$.

| | | | | |
|----------|-----------|----------------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{2}{5}$ | 0 | $+\infty$ |
| $3x^2$ | + | 0 | + | + |
| $5 + 2x$ | - | 0 | + | + |
| $f - g$ | - | 0 | + | + |

$f - g$ est positive sur $\left[-\frac{2}{5}; +\infty\right[$ donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur cet intervalle ; \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g sur $\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right]$.

Exercice 6. (/6) On s'intéresse ici aux types des pokémons, notamment aux types vol et feu. On note F l'événement « le pokémon est de type feu » et V l'événement « le pokémon est de type vol ». On obtient les données suivantes : $\mathbb{P}(F) = \frac{10}{150}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{18}{150}$ et $\mathbb{P}(F \cap V) = \frac{2}{150}$. On laissera tous les résultats sous forme de fractions.

1. Exprimer en français les événements \overline{F} et $V \cap F$.

\overline{F} : le pokémon n'est pas de type feu.
 $V \cap F$: le pokémon est de type feu et vol.

2. Exprimer à l'aide de V et F l'événement « le pokémon est de type vol ou feu » et « le pokémon n'est ni de type vol ni de type feu ».

« Le pokémon est de type vol ou feu » : $V \cup F$.
 « Le pokémon n'est ni de type vol ni de type feu » : $\overline{V \cap F}$.

3. Calculer la probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu puis qu'il ne soit pas de type vol.

La probabilité qu'il ne soit pas de type feu $\mathbb{P}(\overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(F) = \frac{140}{150}$.
 La probabilité qu'il ne soit pas de type vol est $\mathbb{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = \frac{132}{150}$.

4. Calculer la probabilité que le pokémon soit de type vol ou feu.

$$\mathbb{P}(V \cup F) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(V \cap F) = \frac{18}{150} + \frac{10}{150} - \frac{2}{150} = \frac{26}{150}.$$

5. En déduire $\mathbb{P}(\overline{V \cup F})$.

$$\mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = 1 - \mathbb{P}(V \cup F) = 1 - \frac{26}{150} = \frac{124}{150}.$$

6. Calculer la probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol. *Indication* : on pourra commencer par écrire cet événement à l'aide de V et F puis utiliser le fait que $\overline{V \cap F} = \overline{V} \cup \overline{F}$.

L'événement « le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol » est $\overline{V \cap F}$. On a

$$\mathbb{P}(\overline{V \cap F}) = \mathbb{P}(\overline{V}) + \mathbb{P}(\overline{F}) - \mathbb{P}(\overline{V} \cap \overline{F}).$$

D'après l'indication, on a $\mathbb{P}(\overline{V \cap F}) = \mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = \frac{124}{150}$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{V \cup F}) = \frac{132}{150} + \frac{140}{150} - \frac{124}{150} = \frac{148}{150}.$$

La probabilité que le pokémon ne soit pas de type feu ou ne soit pas de type vol est de $\frac{148}{150}$.